

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 giugno 1925.

V. VOLTERRA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica analitica. — *Condizioni di validità dell'equazioni di Lagrange.* Nota del Corrisp. P. BURGATTI ⁽¹⁾.

In un interessante opuscolo: *Sur une forme générale des équations de la dynamique* ⁽²⁾, che fa parte della collezione «*Mémorial des Sciences Mathématiques*», il signor Appell è tornato a trattare, con quella perspicuità che lo distingue, la questione della generalità dell'equazioni di Lagrange, della quale s'era altre volte occupato.

Com'è noto, Hertz fu il primo, riguardo all'applicazione di coteste equazioni, a distinguere i sistemi materiali in olonomi e non olonomi. Sarebbe superfluo rammentare qui i caratteri di tale distinzione. L'Appell ed altri hanno fatto notare che anche per i sistemi olonomi le equazioni di Lagrange non sono sempre applicabili per una *scelta qualunque* dei parametri. Nell'opuscolo citato si trovano dedotte le condizioni a cui deve sottostare la scelta dei parametri, affinchè le equazioni di Lagrange siano valide. Con le considerazioni che seguono si deducono coteste condizioni in maniera quasi ovvia e si chiariscono le cose sotto il punto di vista veramente meccanico.

La maniera più semplice e diretta per dedurre l'equazioni di Lagrange dei sistemi olonomi e non olonomi è quella esposta nelle mie *Lezioni di meccanica* ⁽³⁾, e ch'io già insegnava fin dal 1908. Occorre richiamarne qui i tratti essenziali.

(1) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

(2) Paris, Gauthier-Villars, 1925.

(3) Bologna, Zanichelli, 3^a ed.

Abbiasi un sistema con n gradi di libertà e siano q_1, q_2, \dots, q_n i parametri lagrangiani. La posizione di ogni punto M_s del sistema dipenderà dai valori di quelli, onde si avrà rispetto a un osservatore fisso O ,

$$M_s - O = M_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Perciò, se ∂M_s è uno spostamento virtuale qualunque e V_s è il vettore velocità di M_s al tempo t , risulta

$$(1) \quad \partial M_s = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_i} \partial q_i, \quad V_s = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial M_s}{\partial t}.$$

Di qui si trae l'identità

$$(2) \quad \frac{d V_s}{d \dot{q}_i} = \frac{\partial M_s}{\partial q_i},$$

alla quale va aggiunta quest'altra

$$(2') \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M_s}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial V_s}{\partial q_i}.$$

Ciò posto, l'equazione fondamentale della dinamica

$$\sum_s \left(F_s - m_s \frac{d V_s}{dt} \right) \cdot \delta M_s = 0$$

si trasforma, mediante le (1), (2) e (2'), assai facilmente nella seguente:

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i,$$

ove T è l'energia cinetica e il secondo membro è il lavoro virtuale delle forze applicate.

A questo punto si fa una distinzione. Se il sistema è olonomo, le δq_i sono tutte arbitrarie; talchè risultano l'equazioni di Lagrange propriamente dette, e cioè

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se il sistema non è olonomo, bisogna tener conto delle relazioni che legano le δq_i ; e allora si ottengono altre equazioni simili alle (3), e precisamente

$$(3') \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_s \lambda_s A_{si},$$

ove λ_s sono i moltiplicatori di Lagrange.

Ora l'Appell dimostra che le (3) pei sistemi olonomi e le (3') per i non olonomi non sono sempre *direttamente applicabili qualunque sia la scelta dei parametri*.

Così, per il moto d'un punto in un piano, le (3) si possono senz'altro applicare, se i parametri scelti sono le coordinate cartesiane, le coordinate polari, o coordinate curvilinee qualunque; ma conducono a risultati falsi qualora si prendano come parametri il raggio vettore e l'area del settore circolare compreso fra questo raggio e l'asse polare.

In base a ciò parrebbe che la deduzione precedente non fosse del tutto esatta, giacchè da essa non scaturiscono, in parole esplicite, limitazioni di sorta alla scelta dei parametri.

Ma se ben si osserva, si scorge che nella posizione (1) sta la ragione della sua validità e in pari tempo la limitazione alla scelta dei parametri.

Quando si pone in generale

$$\begin{aligned}\delta x_s &= a_{s1} \delta q_1 + a_{s2} \delta q_2 + \dots + a_{sn} \delta q_n \\ \delta y_s &= b_{s1} \delta q_1 + \dots + b_{sn} \delta q_n \\ \delta z_s &= c_{s1} \delta q_1 + \dots + c_{sn} \delta q_n,\end{aligned}$$

come fanno gli autori che adoperano come ausiliarie le coordinate cartesiane, e si aggiunge per desiderio di generalità che i coefficienti a_{si} , b_{si} , c_{si} , possono essere qualunque, si lascia troppo correre la fantasia dell'analista a scapito del concetto meccanico. Siccome δx_s , δy_s , δz_s sono le componenti del vettore δM_s , anche a_{si} , b_{si} , c_{si} , devono essere quelle del vettore $\frac{\partial M_s}{\partial q_i}$ per tutti i valori di i da uno ad n . Senza di ciò la deduzione precedente manca della sua base fondamentale, che è poi la (2').

Nell'esempio citato di sopra, adoperando le coordinate polari viene

$$\delta M = a \delta r + r b \delta \theta,$$

ove a e b sono i vettori unitari diretti come il raggio vettore e la sua normale, e si ha precisamente

$$\frac{\partial M}{\partial r} = a, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = r b;$$

e cosa simile accade per ogni sistema di coordinate curvilinee. Ma quando in luogo di θ si assume per coordinata l'area $\sigma = \frac{1}{2} r^2 \theta$ del settore, risulta

$$\delta M = a \delta r + 2 b \delta \sigma,$$

e non è più $2\mathbf{b} = \frac{\partial M}{\partial \sigma}$, come subito si vede⁽¹⁾. E molti altri esempi si potrebbero citare.

Tutto questo sta anche a mostrare come l'uso *diretto* del calcolo vettoriale eviti talvolta di perdersi fuori del campo fisico, e renda intuitivo ciò che l'analisi cartesiana arriva a chiarire solo attraverso a complessi calcoli.

In conclusione: l'equazioni di Lagrange (3) e (3') per i sistemi olonomi e non olonomi sono *direttamente* applicabili solo quando i parametri q_i siano scelti in guisa che ogni spostamento virtuale d'un punto del sistema risulti esprimibile mediante una somma di vettori della forma $\frac{\partial M}{\partial q_i}$, in numero uguale ai gradi di libertà del sistema. A cotesti parametri, e solo ad essi compete veramente il nome di *parametri lagrangiani*.

E questa condizione, oltre che essere intuitiva, è in ogni caso di facile verificaione, giacchè $\frac{\partial M}{\partial q_i}$ è il rapporto fra lo spostamento del punto M in corrispondenza a una variazione del solo parametro q_i e questa variazione.

Si deve a l'Appell, com'è noto, una forma più generale delle equazioni della dinamica, valida per qualunque sistema di parametri. L'opuscolo citato in principio è dedicato appunto a questo soggetto.

Idromeccanica. — *Equazioni fondamentali dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque.* Nota del Corrispondente U. CISOTTI⁽²⁾.

I. — FORMA BILINEARE DEL QUADRATO DELL'ELEMENTO LINEARE. — Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{hk} a_{hk} dx_h dx_k = a_{11} dx_1^2 + 2 a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie, i coefficienti a_{hk} essendo funzioni reali, finite e continue di x_1, x_2 , tali che:

$$(2) \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

La (1) si può scrivere anche sotto la forma seguente:

$$(1') \quad ds^2 = \left(\sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} + i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 \right) \left(\sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 \right),$$

essendo $i = \sqrt{-1}$.

(1) $\frac{\partial M}{\partial \sigma}$ è invece uguale a $\frac{2\mathbf{b}}{r}$.

(2) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

Risulta che ds^2 è un prodotto di due espressioni lineari coniugate in dx_1 e dx_2 .

2. - VARIABILE COMPLESSA. — Scende dalla (1') che l'equazione $ds^2 = 0$ si scinde nella equazione:

$$(3) \quad \sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} + i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 = 0,$$

e nella coniugata:

$$(3') \quad \sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 = 0,$$

per cui se:

$$(4) \quad \zeta(x_1, x_2) = \text{costante}$$

è l'integrale generale della prima, risulta essere

$$(4') \quad \bar{\zeta}(x_1, x_2) = \text{costante},$$

l'integrale della seconda, avendo indicato con $\bar{\zeta}$ la coniugata di ζ .

Si rilevi che, per un piano, avendosi $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$ e quindi $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$, la (3) e la (3') divengono:

$$dx_1 + i dx_2 = 0, \quad dx_1 - i dx_2 = 0,$$

e corrispondentemente si ha:

$$\zeta = x_1 + i x_2, \quad \bar{\zeta} = x_1 - i x_2.$$

5. - EQUAZIONE DIFFERENZIALE CARATTERISTICA DI UNA FUNZIONE DELLA VARIABILE COMPLESSA. — Sia f una funzione di ζ ; per cui si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2};$$

ne segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{a_{11}}{a_{12} + i\sqrt{a}} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{df}{d\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \frac{a_{11}}{a_{12} + i\sqrt{a}} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right);$$

ma per essere la (4) integrale della (3), risulta

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{a_{11}}{a_{12} + i\sqrt{a}} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2},$$

per cui:

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{a_{11}}{a_{12} + i\sqrt{a}} \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

E questa condizione caratteristica perchè risulti f funzione della variabile complessa z . Per le superficie piane, essendo $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, la (5) coincide colla nota condizione di Riemann.

4. - CONDIZIONI DI MONOGENEITÀ. — Poniamo

$$f = \varphi + i\psi,$$

dove φ e ψ sono funzioni reali di x_1 e x_2 . Allora la (5) diviene, tenendo conto dell'ultima delle (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{a_{11}}{a_{12} + i\sqrt{a}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \\ - \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{a_{22}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

da cui, separando la parte reale dalla parte immaginaria:

$$(6) \quad \begin{cases} a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \sqrt{a} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \\ a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sqrt{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

che sono condizioni caratteristiche affinchè φ e ψ possano essere parte reale e coefficiente dell'unità immaginaria di una funzione f della variabile z . Esse furono stabilite, con altro metodo, da Beltrami ⁽¹⁾ e comprendono, in particolare, pel piano le condizioni dette, da Cauchy, di monogeneità. Come ha mostrato Beltrami ⁽²⁾, la eliminazione di una delle due funzioni φ e ψ tra le (6) conduce a esprimere la loro armonicità, cioè ciascuna di esse soddisfa all'equazione:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{22} \frac{\partial}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

(1) *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie II, Tomo I, (1868), pp. 329-366, formule (3).

(2) Loc. cit.

5. - MOTI POTENZIALI DI UN VELO LIQUIDO SULLA SUPERFICIE. — Sieno v_1 e v_2 le componenti, secondo le tangenti alle linee x_1 e x_2 , di un vettore superficiale; dipendano dal potenziale armonico φ nel modo seguente:

$$(8) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{a_{11}}}{a} \left(a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_2 = \frac{\sqrt{a_{22}}}{a} \left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right). \end{cases}$$

Per le (6) v_1 e v_2 possono esprimersi anche, più semplicemente, mediante la funzione armonica associata ψ :

$$(9) \quad v_1 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\sqrt{\frac{a_{22}}{a}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

La eliminazione di φ tra le (8) e di ψ tra le (9), dà luogo alle seguenti relazioni di primo ordine tra v_1 e v_2 :

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \sqrt{a_{22}} v_2 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} v_1 \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \sqrt{a_{11}} v_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} v_2 \right\} = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \sqrt{\frac{a}{a_{11}}} v_1 \right\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \sqrt{\frac{a}{a_{22}}} v_2 \right\} = 0,$$

che esprimono rispettivamente la irrotazionalità del moto e la incompressibilità della lamina fluida che riveste la superficie.

6. - EQUAZIONE FONDAMENTALE. — Dalla relazione (N. 4):

$$f(\zeta) = \varphi + i\psi,$$

si ottiene, derivando rispetto a x_1 ,

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

ma e

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1},$$

mentre, per le (8) e (9), si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \sqrt{a_{11}} v_1 + \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}} v_2;$$

pertanto la (12) dà luogo alla:

$$\frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \sqrt{a_{11}} v_1 + \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}} v_2$$

Posto:

$$(13) \quad w = \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial x_1}} \left(\sqrt{a_{11}} v_1 + \frac{a_{12} - i \sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}} v_2 \right),$$

la precedente diviene:

$$(14) \quad \frac{df}{d\chi} = w.$$

Scende da questa che w è funzione della variabile complessa χ . Essa è la equazione fondamentale della idromeccanica laminare ed è destinata a rendere, in questi studi, utilissimi servizi, già sperimentati nei moti piani. Si rilevi che per quest'ultimi moti l'espressione (13) di w va a coincidere colla ben nota $w = v_1 - iv_2$.

7. - VELI APPARTENENTI A SUPERFICIE DI ROTAZIONE. — Per una superficie di rotazione si ha:

$$(15) \quad ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2) d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\omega^2,$$

avendo indicato con θ la collatitudine, con ω la longitudine e ρ il raggio vettore, che è da ritenersi funzione nota di θ , ρ' ne designa la corrispondente derivata. Confrontando la (15) colla (1) si ha:

$$\begin{aligned} x_1 = \theta \quad , \quad x_2 = \omega \quad , \quad a_{11} = \rho^2 + \rho'^2 \quad , \quad a_{12} = 0 \quad , \\ a_{22} = \rho^2 \sin^2 \theta \quad , \quad a = \rho^2 (\rho^2 + \rho'^2) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Per queste, la equazione (3) diviene:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta + i\rho \sin \theta d\omega = 0,$$

il cui integrale generale è:

$$(16) \quad \omega - i \int \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} d\theta = \text{costante},$$

laonde si ha (N. 2):

$$(17) \quad \chi = \omega - i \int \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} d\theta.$$

Ricavandosi da questa

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = -i \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta},$$

la (13) diviene:

$$(18) \quad w = (v_\omega + iv_\theta) \rho \sin \theta,$$

avendo indicato con v_θ e v_ω rispettivamente le componenti della velocità secondo le tangenti ai meridiani e ai paralleli.

8. - VELI SFERICI. — In particolare, per un velo sferico di raggio R si ha $\varphi = R$; conseguentemente la (17) e la (18) divengono rispettivamente:

$$\tilde{\gamma} = \omega - i \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$w = R (v_\omega + i v_\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

9. - LINEE DI FLUSSO. — La congruenza delle linee di flusso risulta definita dall'equazione differenziale:

$$\frac{\sqrt{a_{11}} dx_1}{v_1} = \frac{\sqrt{a_{22}} dx_2}{v_2},$$

ovvero, per le (9), dall'equazione:

$$v_1 \sqrt{a_{22}} dx_2 = v_2 \sqrt{a_{11}} dx_1 = \sqrt{\frac{a_{11} a_{22}}{a}} d\psi = 0.$$

Da questa scende $d\psi = 0$, e quindi $\psi = \text{costante}$ sono le equazioni delle linee di flusso.

Meccanica celeste. — *Un teorema sul problema dei due corpi di masse crescenti.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI ⁽¹⁾.

1. Questo celebre problema, studiato da tanti astronomi e matematici, ha, nelle ricerche di cosmogonia matematica, un'importanza paragonabile a quella del problema dei due corpi di masse costanti nell'ordinaria astronomia. Forse, dalla sua soluzione, potrà venire gran luce sopra la spiegazione delle piccole eccentricità delle orbite planetarie, rispetto a quella delle stelle doppie.

Sventuratamente è stato possibile fino ad oggi di integrarlo soltanto ⁽²⁾ in un numero limitatissimo di casi; ma ciò nonostante, con mezzi indiretti,

(1) Presentata nella seduta del 2 maggio 1925.

(2) Nella mia nota *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili* «Rend. Lincei», 1922, 1° sem., io ho mostrato che supponendo la massa del sistema $M(t) = a + bt^n$ e l'attrazione proporzionale alla potenza K delle distanze il problema è integrabile se $K + n + 3 = 0$ oppure se $K + 2n + 3 = 0$. In queste due categorie rientrano come casi particolari tutti quelli fin ad ora conosciuti e cioè del Mestschersky, del Lovett e della Maderni.

sono state studiate alcune proprietà del movimento. Nella presente nota io dimostro un teorema generale da me trovato, dal quale scaturiscono come conseguenze, molti altri teoremi già dimostrati in proposito dal prof. Pizzetti e dal sottoscritto.

2. Immaginiamo di avere due punti F e G i quali si attirino con la legge di Newton, e studiamo il moto relativo di uno di essi, p. es., G rispetto all'altro F, supponendo che la massa M del sistema sia funzione crescente o almeno non decrescente del tempo t ; in modo cioè che indicando con t e T due istanti qualsiasi, se si ha $T > t$, ne risulti sempre $M(T) \geq M(t)$. Ciò posto abbiamo il seguente:

TEOREMA. — *Supponiamo che in un istante generico t la massa M del sistema aumenti di μ . Siano E ed E' le due coniche osculatrici alla traiettoria di G intorno ad F in due istanti immediatamente precedente ed immediatamente seguente il tempo t ; e sia K la posizione occupata da G al tempo t .*

Le due coniche E ed E' avranno, per ragioni evidenti, un contatto di primo ordine in K.

Dico che le altre due intersezioni saranno immaginarie coniugate; e più precisamente che — eccezione fatta del punto K — la conica E' si svolgerà tutta nell'interno di E e cioè in quella parte del piano compresa tra E e quel fuoco in cui si trova il punto materiale F⁽¹⁾.

3. **DIMOSTRAZIONE.** — Per dimostrare questo teorema cominciamo col ricordare che nel problema dei due corpi di masse variabili, il moto è piano ed avviene con la legge delle aree. Chiamando con f il coefficiente trattivo, con c la costante delle aree, con p il parametro della conica osculatrice — nel senso astronomico — alla traiettoria descritta da G intorno ad F, si ha la nota equazione:

$$(1) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c = \sqrt{M(t)fp}$$

dove r e θ sono le coordinate polari di G rispetto ad F e dalla quale risulta che, se scegliamo le unità di misura in modo da avere:

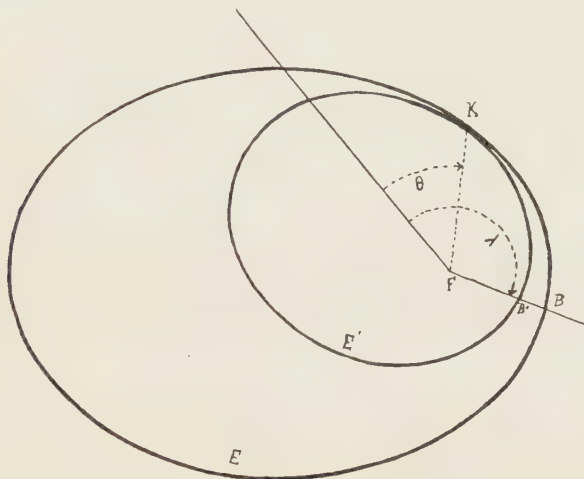
$$c = f = 1$$

si ha sempre:

$$(2) \quad p = \frac{1}{M(t)}$$

(1) Naturalmente se le coniche fossero iperboli, si prende in considerazione soltanto quel ramo in cui si trova effettivamente il punto G; e cioè quel ramo che rivolge la sua concavità al fuoco occupato dal punto materiale F.

Ciò posto supponiamo che nell'istante generico t , la massa M del sistema si incrementi di μ . Sia K la posizione occupata da G in quell'istante ed r e θ le sue coordinate polari rispetto al fuoco F e ad una direzione fissa qualsiasi Fx . La nuova conica osculatrice E' passerà per K , e, per noti principî di meccanica, sarà quivi tangente all'antica conica osculatrice E .



Chiamando con e ed e' le eccentricità delle due coniche, ω ed ω' le posizioni dei due periastri e con p e p' i due parametri, avremo per la prima condizione:

$$(3) \quad \frac{1 + e \cos (\theta - \omega)}{p} = \frac{1 + e' \cos (\theta - \omega')}{p'}$$

e per la seconda:

$$(4) \quad \frac{e \sin (\theta - \omega)}{p} = \frac{e' \sin (\theta - \omega')}{p'}$$

da cui si ricava:

$$(5) \quad e' \sin (\theta - \omega') = \frac{p'}{p} e \sin (\theta - \omega)$$

$$(6) \quad e' \cos (\theta - \omega') = \frac{p'}{p} \left[1 + e \cos (\theta - \omega) \right] - 1$$

Tiriamo ora da F un raggio o semiretta qualsiasi formante un angolo λ diverso da θ con l'asse polare Fx e tale che tagli la conica E in un punto B . Voglio dimostrare che esso taglierà anche la conica E' in un punto B' tale che il segmento FB' risulterà minore di FB ; e tuttocìò qualunque sia la conica E sulla cui natura non faremo nessuna ipotesi, limi-

tandoci soltanto ad osservare che, se essa è un'iperbole, noi dovremo prendere in considerazione unicamente il ramo su cui si trova il punto B.

D'altra parte noi abbiamo l'identità:

$$(7) \quad \begin{aligned} e' \cos (\lambda - \omega') &= e' \cos [(\lambda - \theta) + (\theta - \omega')] = \\ &= e' \cos (\lambda - \theta) \cos (\theta - \omega') - e' \sin (\lambda - \theta) \sin (\theta - \omega') \end{aligned}$$

la quale in virtù della (5) e della (6), diviene:

$$(8) \quad e' \cos (\lambda - \omega') = \left(\frac{p'}{p} - 1 \right) \cos (\lambda - \theta) + \frac{p'}{p} e \cos (\lambda - \omega)$$

Ma per la (2) si ha:

$$(9) \quad \frac{p}{p'} - 1 = \frac{\mu}{M}$$

Ciò posto, scrivendo le equazioni delle due coniche E ed E' e dividendo, si ha immediatamente:

$$(10) \quad \frac{FB'}{FB} = \frac{1 + e \cos (\lambda - \omega)}{1 + e \cos (\lambda - \omega) + \left(\frac{p}{p'} - 1 \right) (1 - \cos (\lambda - \theta))}$$

Vale a dire, sostituendo al posto di $1 + e \cos (\lambda - \omega)$ il suo valore $\frac{p}{FB}$ e servendosi della (9):

$$(10-bis) \quad \frac{FB'}{FB} = \frac{Mp}{Mp + \mu FB (1 - \cos (\lambda - \theta))}$$

dalla quale si ricava subito che il rapporto $\frac{FB'}{FB}$ è minore dell'unità, o, ciò che è lo stesso, che B' si trova internamente al segmento FB. La conica E' è quindi tutta interna ad E, salvo ad avere con essa un contatto di primo ordine nel punto K, cioè per $\lambda = \theta$, come d. d.

4. COROLLARI. — Come abbiamo detto, da questo teorema si traggono come corollari altri numerosi teoremi dovuti a vari autori. Eccone alcuni:

I. Se la conica osculatrice alla traiettoria è, in un dato istante, ellittica, essa resterà ellittica in tutti gli istanti successivi. (Armellini, « Mem. Acc. dei XL », 1913).

II. Se $M(t)$ è funzione sempre crescente del tempo⁽¹⁾, il raggio vettore ha in ogni istante un valore minore del raggio vettore kepleriano. (Pizzetti, « Rend. Linc. », 1915, II).

III. Sia $M(t)$ funzione sempre crescente del tempo e supponiamo che il raggio vettore r , nell'istante t passi per un massimo R . Da t in poi, r si conserverà sempre minore di R . (Armellini loc. cit.).

Altre nuove conseguenze di questo teorema, relative al caso di masse sempre crescenti col tempo, sono le seguenti:

IV. L'asse maggiore della conica osculatrice alla traiettoria è funzione sempre decrescente del tempo, se essa è ellittica; crescente, se è iperbolica.

V. Il punto mobile K non potrà mai ripassare per alcuna posizione da esso precedentemente occupata. L'orbita relativa di K , intorno ad F non può quindi avere punti multipli.

5. Supponendo $M(t)$ derivabile, la proprietà IV ora dedotta con considerazioni geometriche, può facilmente dimostrarsi per via analitica. Chiamando infatti con v la velocità del punto K in un istante generico t , e con a il semiasse maggiore della conica osculatrice, supposta ellittica, abbiamo:

$$(11) \quad v^2 = M \left\{ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right\}$$

Immaginiamo ora che, nell'istante t , la massa M aumenti di dM e prendiamo la derivata logaritmica della (11) ricordando che v ed r restano inalterati. Avremo:

$$(12) \quad 0 = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

da cui, eliminando r per mezzo della (11) risulta:

$$(13) \quad \frac{dM}{M^2} + \frac{da}{V^2 a^2} = 0$$

Ne segue immediatamente che, essendo dM positivo, da sarà negativo.

(1) Cioè se per $t_2 > t_1$ si ha sempre $M(t_2) > M(t_1)$ qualunque siano t_1 e t_2 . Sarà opportuno distinguere il differente significato del teorema del Pizzetti rispetto a quello ora dimostrato. Il Pizzetti paragona il raggio vettore del *punto effettivamente occupato* dal pianeta col raggio vettore kepleriano. Il nostro teorema invece paragona *tutta la conica osculatrice* con la successiva. Esso quindi si estende anche a quei punti della conica che *non verranno mai ad essere occupati* dal pianeta; il quale, per la variazione di massa, può descrivere solo un tratto brevissimo — od anche infinitesimo, se la variazione è continua — di una conica osculatrice per passare poi ad un'altra.

Se la conica osculatrice è iperbolica, basta porre $\frac{1}{a}$ in luogo di $-\frac{1}{a}$ nella (11), e se ne ricava che a è funzione crescente.

6. Immaginando quindi che l'orbita osculatrice fosse originariamente iperbolica, a cresce col tempo e può tendere verso ∞ ; vale a dire la conica osculatrice può tendere alla parabola. Supposta raggiunta questa curva di discriminazione, il più lieve incremento di massa la trasforma immediatamente in ellisse.

Da questo punto in poi altri incrementi di massa fanno diminuire il semiasse maggiore a , il quale dovrà allora tendere necessariamente ad un limite, che - secondo la forma della funzione $M(t)$ - potrà anche essere uguale a zero.

Chimica. — *Sulla reagibilità dell'argento con l'ossigeno.* Nota del Corrisp. N. PARRAVANO e di G. MALQUORI ⁽¹⁾.

L'ossidazione diretta dei metalli nobili è stata realizzata nel gruppo del platino, e le ricerche più estese sull'argomento si debbono a L. Wöhler ⁽²⁾. L'ossidazione dell'argento, già osservata da Berzelius ⁽³⁾ e da Deville e Debray ⁽⁴⁾, fu più tardi studiata da Le Chatelier ⁽⁵⁾ che riconobbe come la formazione di ossido d'argento può avere luogo alle temperature di 300° e 358° a condizione di operare alle pressioni rispettivamente di 10-15 atm. nel primo caso, di 49 atm. nel secondo. Berthelot, che pure si è occupato della questione ⁽⁶⁾, ha ritenuto che la ossidazione dell'argento si può verificare anche alla pressione atmosferica, e che essa cresce col crescere della temperatura (fino a 550°).

Servendoci dello stesso dispositivo sperimentale descritto in una nota precedente ⁽⁷⁾, abbiamo voluto meglio accertare e definire la capacità dell'ossigeno molecolare a ossidare l'argento, scaldando in ambiente di ossigeno argento preparato in maniere diverse. Abbiamo precisamente adoperato:

a) argento in polvere finissima ottenuto precipitandolo a freddo con glucosio dalla soluzione ammoniacale del nitrato;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma. Presentato nella seduta del 4 aprile 1925.

(2) « Berichte », 36, 3475 (1903).

(3) « Jahresberichte », 4, 66.

(4) « Ann. d. Chem. », 104, 228.

(5) « Bull. Soc. Chim. », 48, 342 (1887) C. R. 128, 996 (1899).

(6) « C. R. », 131, 1159 (1900).

(7) Questi « Rendiconti » (6), 1, 417 (1925).

b) argento in polvere più grossa precipitato con bisolfito dalla stessa soluzione ammoniacale del nitrato;

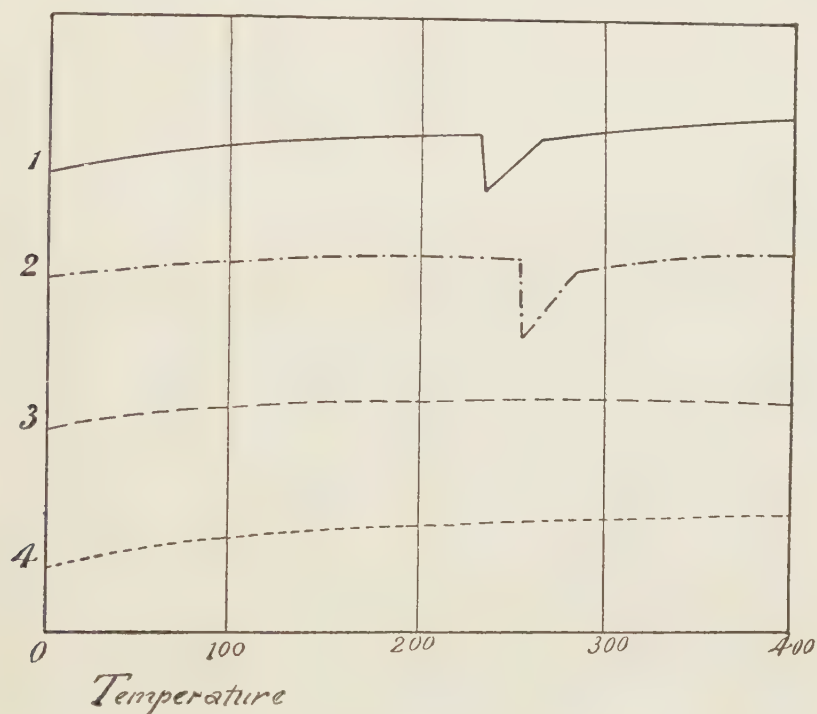
c) argento in cristalli dendritici preparati elettroliticamente;

d) argento in massa compatta.

15,3 gr. di ciascuno di questi tipi diversi di argento sono stati messi a contatto con 93 cm³ di ossigeno alla pressione di 675 mm.

Invece che nel tubo di porcellana, come nel dispositivo già descritto, l'argento era contenuto in una bolla di vetro duro, saldata al capillare che costituisce la branca più corta del tubo ad U.

Riscaldando con la velocità di 1° ogni dieci secondi, si è misurata la variazione di pressione nell'interno dell'apparecchio in funzione della temperatura.



I risultati sono riportati nella figura dove sono tracciate le curve temperatura-pressione per le quattro varietà di argento adoperate:

- N. 1 Ag dal glucosio;
- » 2 » dal bisolfito;
- » 3 » elettrolitico;
- » 4 » in massa compatta.

Come si vede da questa, mentre l'argento in massa compatta e quello elettrolitico sono inerti rispetto all'ossigeno, l'argento separato dal bisolfito e quello ottenuto con glucosio assorbono nettamente ossigeno l'uno a 250° e l'altro a 230°.

L'ossigeno assorbito viene espulso entro un breve intervallo di temperatura, per modo che a 300° la curva riprende già il suo andamento regolare.

Per il modo come il fenomeno si presenta non può esservi dubbio che l'ossigeno sottratto all'ambiente gassoso si combina con l'argento a formare ossido. Le temperature di inizio della reazione a 230° e a 250° non si accordano però con quanto si può prevedere in base ai valori delle tensioni di scomposizione dell'ossido di argento calcolati con l'equazione di Nernst. Infatti le tensioni di dissociazione dedotte dalla relazione:

$$\log p = - \frac{13130}{4.571 T} + 1.75 \log T - \frac{0.010}{4.571} T + 2.8$$

sarebbero, per $T = 503$ (230°), $P = 5.1$ atm; per $T = 523$ (250°) $P = 8,3$ atm., mentre noi abbiamo operato a pressioni inferiori a una atmosfera.

La divergenza si spiega però facilmente tenendo presente che le nostre temperature di inizio della reazione non sono temperature di equilibrio. L'argento è inerte rispetto all'ossigeno; l'aumento di temperatura e la forma finemente suddivisa del metallo sopprimono più o meno le resistenze passive che si oppongono alla ossidazione, ma il riscaldamento rapido come noi lo abbiamo effettuato non permette di riconoscere una temperatura di reazione che corrisponda a uno stato di equilibrio.

Operando in maniera diversa, e cioè mantenendo l'argento a contatto con l'ossigeno a temperatura costante per un tempo sufficientemente lungo, si riesce infatti ad accertare un assorbimento di ossigeno a temperature notevolmente più basse di quelle che si deducono dalla fig. 1.

I risultati riportati nella tabella si riferiscono ad esperienze eseguite scaldando gr. 15 di argento dei diversi tipi avanti indicati, per cinque ore, nel solito apparecchio, in presenza di 108 cm³ di ossigeno.

TABELLA.

$t = 156^{\circ}$

$\% \text{ O}_2$ assorbito

Ag dal glucosio	0,003	
» dal bisolfito	0,002	
» elettrolitico	—	$P = 731 \text{ mm.}$
» barretta	—	

$t = 193^{\circ}$

$\% \text{ O}_2$ assorbito

Ag dal glucosio	0,174	
» dal bisolfito	0,097	
» elettrolitico	—	$P = 687 \text{ mm.}$
» barretta	—	

$t = 213^{\circ}$

$\% \text{ O}_2$ assorbito

Ag dal glucosio	0,228	
» dal bisolfito	0,203	
» elettrolitico	—	$P = 745 \text{ mm.}$
» barretta	—	

$t = 230^{\circ}$

$\% \text{ O}_2$ assorbito

Ag dal glucosio	0,074	
» dal bisolfito	0,158	
» elettrolitico	—	$P = 745 \text{ mm.}$
» barretta	—	

$t = 250^{\circ}$

$\% \text{ O}_2$ assorbito

Ag dal glucosio	0,012	
» dal bisolfito	0,065	$P = 760 \text{ mm.}$
» elettrolitico	—	
» barretta	—	

Questi risultati mostrano che i due primi tipi di argento a grande superficie reagiscono con l'ossigeno a temperature inferiori a quelle che si ricavano dalla figura 1. Essi dimostrano pure che la velocità con cui l'assorbimento si verifica è diversa nei due tipi, e aumenta con l'aumentare della temperatura.

A 230° e a 250° le quantità di ossigeno assorbite in tempi eguali sono minori di quelle assorbite a temperature più basse.

Ciò può essere messo in relazione con una parziale decomposizione dell'ossido d'argento inizialmente formatosi, decomposizione che avviene in maniera molto lenta, come provano le esperienze di Le Chatelier e Guntz ⁽¹⁾ e di Lewis ⁽²⁾, nonché la curva di riscaldamento rapido determinata da Mazzetti ⁽³⁾.

Geologia. — *Nuove osservazioni sui calcari con « Heterodicerias Luci » della costa Parentina in Istria.* Nota del Socio C. F. PARONA ⁽⁴⁾.

Nei « Rendiconti » del 1912 (3 nov., p. 578) ho dato notizia della presenza di calcari di scogliera con *Heterodicerias Luci* sulla costa a sud di Parenzo, costituenti l'orizzonte geologico più antico della serie mesozoica istriana. I risultati di una recente visita, fatta insieme con l'ing. C. Crema e col prof. Matteo Calegari alla costa parentina ed all'isoletta Riso, mi porgono l'opportunità ed argomenti per riconfermare con qualche maggior particolare la nota precedente.

Il calcare coralligeno, già descritto, si presenta allo scoperto soltanto lungo la linea di spiaggia, ed è altrove nascosto sotto la macchia folta dei querceti: è quanto mai sconnesso per fenditure in ogni senso, allargate dall'erosione marina, come ben si vede lungo la costa, che dal molo di Porto Fontane si svolge verso Punta Fontane. Non vi si riconoscono piani di stratificazione, salvo un incerto indizio per breve tratto di banco leggermente inclinato a sud, al margine meridionale dell'isoletta Riso. Il carattere di scogliera coralligena del calcare, spesso poroso e brecciato, è reso evidente da numerosi coralli a focaccia grandi e piccoli, pur troppo di rado riconoscibili nel genere e nella specie per la profonda, irregolare erosione marina e per l'alterazione strutturale della roccia. E, per le stesse cause, fra i numerosi resti di *Heterodicerias* sono rari gli esemplari che conservano sufficienti caratteri per il riconoscimento della specie.

(1) Loc. cit.

(2) « Zeit. f. Phys. Chem. », 55, 449 (1905).

(3) Questi « Rendiconti » (5) 33, 46 (1924).

(4) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

L'accennata folta vegetazione toglie la possibilità di rilevare la linea limite lungo la quale questa massa calcare passa sotto altri calcari, che si sviluppano lungo la costa, sulla quale il calcare coralligeno fossilifero affiora anche tra Orsera ed il Canale di Leme (Bocca di Leme), come lo provano i campioni quivi raccolti dall'ing. Crema. I calcari marnosi con radiolitidi e con *Neithea Zitteli*, già conosciuti presso Parenzo, si presentano più addentro nel litorale. A Fontane, quasi sulla costa, si sviluppano invece, ed è da ritenere che si sovrappongano al calcare di scogliera, i calcari marmorei compatti, che in parecchie cave danno la nota « pietra dura di Fontane » nelle sue varietà diversamente pregiate come materiale ornamentale, più o meno atto alla lavorazione e pulitura e più o meno resistente.

Esaminandone i grossi blocchi non può sfuggire la somiglianza e spesso l'identità coi tipi della *maiolica* lombarda e del *biancone* veneto, anche per la frattura concoide, il colore più spesso bianco-latteo, le risaldature suturiformi giallo-rossastre. Per quanto mi risulta, questi calcari non contengono fossili, e ciò mi è anche confermato dal collega ed amico Calegari, che a mia preghiera fece apposite ricerche. L'esame delle lastrine al microscopio mi rilevò soltanto probabili spicule di calci-spongie. La successione stratigrafica appare regolare dal livello a facies litologica e paleontologica titoniana dei calcari con *Heterodicerias*, a questi calcari compatti (pietra dura di Fontane), con facies litologica comparabile a quella della *maiolica-biancone*, membro di passaggio fra neogiurassico ed eocretacico nelle Prealpi e nell'Appennino centrale.

Affatto simili nell'aspetto all'isoletta Riso sono le altre piccole isole e gli scogli, che si allineano da nord a sud, come avanguardie, a breve distanza dalla costa rocciosa da Parenzo a Orsera, alla Bocca di Leme. E poichè la serie di isole e di scogli prosegue anche oltre Rovigno, non è improbabile che altre ricerche riconoscano l'estendersi della stessa natura geologica a quest'altro tratto della costa istriana. Riguardo al gruppo delle Brioni, il compianto collega De Stefani (Boll. Soc. Geol. Ital., XLIII, 1924, p. 194) ritiene che le assise calcari più antiche, che vi affiorano, siano turoniane e cenomaniane.

Non ripeterò le già esposte osservazioni di micropaleontologia in quanto riguardano il calcare coralligeno. Posso aggiungere di avere notato la presenza di *Ammodiscus*, *Involulina*, *Rotalia*, *Textularia*, con scarsa rappresentanza di miliolidi e di globigerine. Abbondanti sono le spicule ramosi di calcispongie. Non posso sciogliere il dubbio circa il riferimento dei non abbondanti resti di sifonee alla *Tetraporella Remesi* Steinm.; più probabilmente si tratta di una forma del gen. *Triploporella*: d'altra parte non parmi dubbio il riferimento al titoniano *Milleporidium Remesi* Steinm: delle sezioni radiali e tangenziali di un idrozoo quali si presentano nelle lastrine sottili.

I fossili macroscopici riconosciuti con sicurezza o con dubbio, specialmente per i corallari, compresi quelli raccolti in gite precedenti dal prof. Ca-

legari e dall'ing. Crema, sono: *Heterodicerias Luci* Defr. (in G. Boehm) ⁽¹⁾, *Astrocoenia Delemontana* Koby?, *Diplocoenia polymorpha* Koby, *Dendrogyra angustata* (d'Orb.)? *Isastraea Thurmanni* Etall., *Is. variabilis* Et., *Microsolena stellata* Ogilv., *Thamnostrea aspera* Ogilv., *Thamn. strambergensis* Ogilv.?, *Chaetetes Capri* 1 De Ang. d'Oss., *Porospongia marginata* (Münst.). La fauna è sicuramente assai più ricca di quanto non risulti da questo breve elenco: ma, come dissi, la cattiva conservazione dei fossili non permette il riconoscimento di un maggior numero di specie. Aggiungerò che sono frequenti certi corpi tuberiformi di calcare bianco, a sottili zone concentriche, senza altra struttura che consenta di verificare se siano avanzi fossili di alghe corallinee o di idrozoi, piuttosto che semplici concrezioni.

Come è noto, è discusso il livello di separazione, o meglio di passaggio fra titoniano e urgoniano; ed invero esso è spesso litologicamente e paleontologicamente difficile da fissare. I calcari a *Heterodic. Luci* (s. l.), dapprima attribuiti al portlandiano superiore, furono recentemente interpretati come estesi all'infravalanginiano, a costituire il livello inferiore delle facies coralligene infracretaciche. Nel nostro giacimento gli individui colle caratteristiche dello *Heterodicerias* di Stramberg sono numerosi, e gli altri fossili, che li accompagnano, appartengono pure a forme schiettamente titoniane. Con qualche fondamento possiamo dunque confermare che la formazione coralligena della costiera parentina costituisce il membro inferiore, di età neogiurassica, di una serie regolare, la quale nella restante parte rappresenta, a quanto pare, l'infracretacico col tipo litologico biancone-maiolica.

Le condizioni stratigrafiche locali sconsigliano dal pensare a contatti anormali per fratture ⁽²⁾, oppure di interpretare l'affioramento coralligeno quale spuntone di scogliera titoniana emergente fra calcari neocretacici, in ricoprimento discordante. L'amico e collega Sacco, per osservazioni e considerazioni di ordine stratigrafico, non è convinto dell'età titoniana dei calcari di scogliera oggetto di questa nota; ed infatti nel suo recente schema di carta geologica della Venezia Giulia attribui alla serie cretacica tutto il tavoliere « Istria rossa » da Punta Umago al Capo Promontore ⁽³⁾. Ai futuri, speriamo pros-

(1) J. FAVRE, (E. JOUKOWSCHY et J. FAVRE « Mém. géol. et paléont. du Salève » (Haute Savoie) « Mém. Soc. Phys., Hist. Nat. » Genève, XXXVII, 1913, p. 484), asserisce che *Heter. Luci* Defr. è finora noto soltanto per l'infravalanginiano del Salève: tutti gli altri *Heterodicerias* citati sotto il nome di *H. Luci* nel titoniano differiscono dalla specie del Defrance, che è più nettamente carinata: egli propone di tenere distinto lo *H. Luci* di Stramberg, le cui tre varietà forse converrà erigere a specie. Non ho elementi per risolvere la questione, ma posso per altro rilevare che la forma parentina è di tipo titoniano piuttosto che infravalanginiano.

(2) C. F. PARONA, *Titonico e cretacico nell'isola di Capri: revisione dei fossili dei calc. corallig.* « Rend. R. Acc. Linc. », XXVIII, 1919, p. 479.

(3) F. SACCO, *Schema geologico dell'Istria*, « Universo » V, 1924, p. 9. — Id., *L'Istria*, « Cenni geolog. generali; Mem. descritt. della carta geol. d'Italia », XIX, R. Ufficio Geologico, 1924, p. 10.

simi, rilevamenti particolareggiati ed a nuovi studi spetta di verificare se siano nel vero le deduzioni del paleontologo o quelle dello stratigrafo.

Credo opportuno di aggiungere un'altra osservazione fatta nell'isoletta di Riso, che parmi non priva di interesse. Già l'ing. Crema, nella sua prima visita all'isola, aveva notato sulla spiaggia a sud un affioramento di pochi metri quadrati di una roccia, con aspetto di arenaria grigio scura-rossastra, entro una lacerazione, per erosione del mare, del calcare coralligeno. Ricosciuto il piccolo giacimento nella nostra seconda visita, restava da spiegare il singolare spuntone della supposta arenaria. Coll'esame al microscopio di lastre sottili mi risultava, oltre la mancanza di detriti di organismi e di minuti fossili, che la roccia era formata di un aggregato di minutissimi, nitidi, cristalli di calcite. L'amico e collega prof. E. Repossi, accogliendo gentilmente il mio invito, esaminò la roccia nel riguardo petrografico, col risultato che qui trascrivo.

« L'esame microscopico della roccia, che ha macroscopicamente un aspetto francamente arenaceo, dimostra ch'essa è pressochè del tutto formata da *calcite*, con una struttura che, nelle parti a grana più grossolana, si potrebbe quasi chiamare porfiroblastica. Infatti essa appare costituita da individui calcitici ben formati e abbastanza grandi, sparsi in una massa pure calcitica a grana alquanto più minuta.

« L'esame delle sezioni sottili non rivela, oltre alla calcite, nessun altro componente all'infuori di piccoli grumi irregolari di un minerale bruno o verdiccio, in cui talvolta è visibile una polarizzazione d'aggregato abbastanza caratteristica e che è probabilmente attribuibile alla *glauconite*, quantunque non si presenti nella forma a granuli consueta di questo minerale.

« Una scheggia della roccia, del peso di qualche grammo, fu attaccata a freddo con acido cloridrico molto diluito con lo scopo di separare e determinare approssimativamente la quantità di sostanza estranea che il calcare contiene. In queste condizioni venne sciolto nella roccia circa il 98 %. Il residuo è interamente formato dai grumetti del minerale sopra ricordato e non c'è traccia di scheletro sabbioso ».

Questa composizione e struttura della roccia e la forma dell'affioramento non in banco, nè in strati, ma piuttosto come deposito entro una cavità del calcare coralligeno, suggeriscono l'idea che possa trattarsi di una massa di pseudosaldame non più incoerente, come se ne osservano in altri punti dell'Istria (ad es. a Repen Piccolo [Trieste]) e come se ne conoscono anche, a quanto si dice, nell'Appennino Centrale.

Geologia. — *Nuove osservazioni sul massiccio cristallino di Savona.* Nota del Socio Corresp. GAETANO ROVERETO ⁽¹⁾.

Quando nel 1907 affermavo ⁽²⁾ che il massiccio cristallino del Savonese fa parte di una falda di ricoprimento, mi fondavo soprattutto sulla constatazione, che lungo la valle del Letimbro, fra Savona e lo spartiacque appenninico, esiste una *finestra*, che denominavo del *Santuario*, di terreno permo-carbonifero, affiorante da sotto i gneiss e i micascisti ⁽³⁾. Posso ora disporre di una nuova osservazione, per dare maggior risalto al carattere di finestra che tale zona di paleozoico offre.

Sono da un po' di tempo in corso dei grandi lavori di sterro per estendere la città di Savona verso la collina dei Cappuccini; si tracciano strade e si gettano le fondamenta di numerose costruzioni. Superficialmente vi è quasi per tutto un manto di pliocene marino, ma asportato questo, si è inaspettatamente trovata tutta una serie di terreni triassici, invertita nei suoi termini: alla base sta un calcare a giroporelle del trias medio, poi vengono le quarziti del trias inferiore, gli scisti sericitici violacei ancora del trias, o di già del permiano, dei graniti laminati, delle miloniti quarzose e degli scisti plumbei sericitici permo-carboniferi, infine, come termine più alto, i gneiss.

Siamo sull'allineamento della finestra del Letimbro, e questa qui si spalanca per lasciar scorgere assai più di quanto si conosceva sinora di essa. Ciò avviene, perchè tutta questa serie di terreni antracolitico-triassici, che altrove ha migliaia di metri di potenza, per effetto, suppongo, della laminazione e dello stiramento tettonico, conseguente dal viaggio sostenuto dalla falda di cui fa parte, è ridotta a poca cosa: il calcare affiora per una decina di metri di spessore, la quarzite è potente tre o quattro metri, lo scisto violaceo tre metri, le miloniti quarzose e il granito laminato da nove a dieci.

Lungo Via Vittorio Poggi si osservano dapprima degli scogli, isolati nel pliocene, di calcare fratturato, in cui ho trovato le giroporelle; poi vengono quarziti micacee, scistose e contorte; infine, dove si hanno le fondamenta delle nuove costruzioni annesse al collegio di Monturbano, comincia un gneiss più o meno milonitizzato.

(1) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

(2) « Bull. Soc. Géol. France » p. 6, 1907; « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXVIII, p. 389, 1909.

(3) Questa finestra veniva poi confermata e ristudiata da TERMIER e BOUSSAC, « Bull. Soc. Géol. France », vol. 1912.

Lungo il Caruggio delle Strie, da sotto i gneiss, spunta una roccia micacea quarzosa, che è un impasto milonitico, e che già conosco come quello accompagnante dovunque il contatto, in qualche caso discordante ⁽¹⁾, fra gneiss e idromicascisti; poi si ha un granito laminato a grossa grana, il quale forma anche lo sprone verso il Letimbro della collina di Sant'Urbano, e che ancora affiora nel mezzo della nuova Via San Lorenzo. Questo granito è identico a quello, che dalla parte opposta della valle, nel mezzo della finestra, e per intero abbracciato dagli scisti permiani, costituisce la collina sulla quale è fondata la chiesetta di Madonna degli Angeli, curioso giacimento, dal quale ho dedotto l'età permiana delle masse granitiche della regione.

La trincea aperta lungo Via Mentana ha messo in evidenza i calcari del trias in posizione inversa rispetto alle quarziti, e come queste siano sotto gli scisti violacei, con una inclinazione a nord-est di 25°: gli gneiss sono visibili, come ho detto, un poco più in su, lungo il Caruggio delle Strie, e nelle fondamenta delle nuove costruzioni di Mont'Urbano.

Abbondo nei particolari, perchè questi fra pochi anni saranno spariti sotto le costruzioni della città. Inoltre, prendo occasione dall'essere in argomento per far notare, che nelle sintesi pubblicate ultimamente sulla tettonica alpino-appenninica si trovano alcune asserzioni poco fondate, se non erronee.

Sin dal 1909, al luogo già citato, ho confrontato il massiccio del Savonese con quello della Dent Blanche; nulla però concludevo, perchè il mio pensiero era piuttosto di collegarlo con la zona del Monte Rosa: oggi in tutti gli scritti sintetici di tettonica alpina, senza alcuna riserva, viene considerato tale massiccio come facente parte delle *nappe* della *Dent Blanche*, distinta da Lugeon e Argand sin dal 1905, o della *Dentblanchedecke* (Jenny), o della *Dentblanchestirn* (Staub), o del massiccio autoctono della Sesia (Kober) ⁽²⁾. Ora la piega-falda della Dent Blanche consta dell'esteso lembo di ricoprimento Cervino-Dent Blanche, dei minori del M. Emilius, del Pillonet, ecc., delle radici della *zona Sesia*. A nessuna di queste parti possono corrispondere le due masse gneissiche del Savonese, intramezzate dalla finestra del Santuario: poichè sono, invece, due segmenti del *corpo di una falda* che nasce a oriente, da sotto la serie delle pietre verdi del gruppo di Voltri, e si rovescia a occidente, contro la parte ligure della zona assiale del Brianzonese e del Gran San Bernardo. Quindi i suoi rapporti con le zone che la comprendono son ben differenti di quelli della *zona Sesia*, ma eguali a quelli dei massicci Dora-Maira, quindi della *zona del M. Rosa*. A

(1) Ciò è ad es. visibile lungo la strada militare a M. Cinto, e potrebbe indicare due fasi di piegamento paleozoico, come quelle che nelle Alpi Occidentali ha distinto il LUGEON «Comptes Rendus Acad. d. Sc.», vol. CLIII, p. 984, 1911.

(2) LUGEON M., ARGAND E., *Grandes nappes de recouvrement de la zone du Piémont*, «Comptes Rendus Acad. d. Sc.», 15 mai, 1905; JENNY H., *Die alpine Faltung*, p. 73, Berlin, 1924; KOBER L., *Der Bau der Erde*, p. 128, Berlin, 1921; STAUB R., *Der Bau der Alpen*, p. 32, Bern, 1924.

ciò aggiungasi, che nell'intervallo esistente fra gli ultimi estremi meridionali del massiccio Dora-Maira e il Savonese si ha il *massiccio di Calizzano*, riconosciuto per la prima volta da chi scrive su materiale raccolto da Arturo Issel ⁽¹⁾, e che nella carta delle Alpi Occidentali del R. Ufficio Geologico figura come un nucleo di pirosseno-anfiboliti e fasce perimetrali delle stesse rocce, alternate col permo-carbonifero; perchè lo Zaccagna non volle ammettere che i gneiss includenti queste rocce verdi fossero tali ⁽²⁾; ma gli altri osservatori mi hanno dato ragione, anzi il Franchi ha ultimamente riconosciuto, che questi gneiss giungono sino al Tanaro, sotto Bagnasco ⁽³⁾. Il neofobismo è oggi la rovina della geologia italiana!

Dopo ciò mi sia permesso di dire, che il riferimento del massiccio del Savonese alla *zona Sesia* o della *Dent Blanche* non è sicuro quanto sembra dalle ultime sintesi dei geologi stranieri; è più conforme alle consistenze tettoniche, senza che ostacolino i caratteri petrografici, continuare a riferire il massiccio del Savonese alla zona del Monte Rosa, come si è fatto da De Stefani, da Franchi, e da me ⁽⁴⁾ da più di trent'anni, benchè in questo frattempo la comprensione delle zone alpine abbia mutato sin dalle fondamenta.

Ma a parte questo apprezzamento, che è dopo tutto discutibile, si trova nelle sintesi dei geologi stranieri un'altra conclusione, la quale è senz'altro un errore, e un errore molto dannoso, perchè costituisce un vero passo indietro; ed è quello di riunire il *massiccio delle pietre verdi* del gruppo di Voltri con il flysch del restante Appennino. Le pietre verdi di Voltri coprono il massiccio di Savona, come quelle di Piosasco e di parte della valle della Dora coprono, e cingono dalla parte interna dell'arco, il massiccio Dora-Maira, appartengono quindi alla zona del Monte Rosa. Si estendono sino alla valle del Chiaravagna, nei pressi a ponente di Genova, e sono composte fra l'altro da serpentine con eclogiti, da gabbri glaucofanizzati, da prasiniti, il tutto compreso nei calcescisti liassici ⁽⁵⁾. A levante della Valle del Chiaravagna invece, dopo uno spiccatissimo contatto anormale, attraversante tutto l'Appennino, si ha il flysch argilloso-calcareo, racchiudente serpentine, che non sono mai granatifere, gabbri che non sono mai glaucofanizzati, diabasi che sostituiscono le prasiniti: per cui, se anche si volesse sostenere che queste seconde pietre verdi non sono eoceniche, come vuole la tradizione italiana, ma mesozoiche, bisognerebbe sempre dire che sono differenti dalle liassiche, e, come portano le condizioni tettoniche, posteriori a queste ⁽⁶⁾.

(1) «Atti Società Ligustica di Scienze Naturali», vol. XV, 1904.

(2) Viceversa, nella carta-geologica dello STAUB, è indicato un lembo della zona della Dent Blanche nel mezzo della Collina di Torino, per derivazione, probabilmente, da qualche errore litografico.

(3) «Rend. Accad. Lincei», p. 197, 1925.

(4) «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. XIV, 1895.

(5) Ho trovato resti di belemniti nei calcescisti in Gallinea, in Val Gorsexio, sopra Voltri.

(6) Come già ho altrove sostenuto, la falda del M. Rosa presenta lungo il Chiaravagna un piegamento, che non è più antico dell'eocene medio (è la *trasgressione meso-*

Botanica. — *Sul particolare sviluppo del gametofito di « Euphorbia dulcis L. ».* Nota del Corrisp. E. CARANO ⁽¹⁾.

Una specie molto interessante per il suo comportamento embriologico, specialmente per il modo come si edifica il gametofito femminile, è l'*Euphorbia dulcis* L.

Essa è già stata esaminata dall' Hegelmaier per il fenomeno della poli-embrionia, ma è ancora pochissimo nota dal punto di vista dello sviluppo del sacco embrionale, tanto è vero che la ipotesi avanzata prima dall' Hegelmaier e poi dal Winkler e da altri della esistenza in questa pianta di apogamia o di partenogenesi, si è dimostrata al mio esame senza fondamento. Io son dietro a terminare uno studio al riguardo, ma qui riferirò soltanto sulla origine e lo sviluppo del gametofito femminile.

Nella famiglia delle Euphorbiacee si conoscono finora, per i lavori di Lyon ⁽²⁾, Modilewski ⁽³⁾, Dessiatoff ⁽⁴⁾, Arnoldi ⁽⁵⁾, Donati ⁽⁶⁾, Weniger ⁽⁷⁾,

nummularia delle Alpi). Di contro a tale piegatura, abrasa dal mare dell' eocene superiore, con contatto anormale, si ha il flysch appenninico, con pieghe dell' eocene superiore. Questo eocene, dal Chiaravagna sino a Sestri Levante, o è parautoctono, o fa parte di una falda priaboniana. A Sestri Levante ho di recente scoperto un altro contatto anormale, che attraversa a sua volta l' Appennino, dal mare a Rovereto in Val Trebbia. In questo caso l'anormalità del contatto è dato dalla piega degli scisti che imballano le ofioliti; ond'è che queste sarebbero di un'altra età, o di altro tempo di piegamento, e la sicurezza che avevo nel riferire all' eocene tati ofioliti è ora profondamente scossa. Ma di ciò in altro scritto. (Cfr. « Rend. Accad. Lincei », p. 295, 2° sem., 1917; *Trattato di Geologia Morfologica*, p. 317 e schizzo tettonico a p. 319, Milano, Hoepli, 1923).

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto botanico di Firenze.

(2) LYON F. M., *A contribution to the life history of « Euphorbia corollata »*. « Bot. Gazette », vol. XXV, 1898, p. 418.

(3) MODILEWSKI J., *Zur Embryobildung von Euphorbia procera*. « Berichte d. Deutsch. Bot. Gesellsch. ». Bd. XXVII, 1909, p. 21.

Id. — *Weitere Beiträge zur Embryobildung einiger Euphorbiaceen*. Ibid. Bd. XXVIII, 1910, p. 413.

Id. — *Ueber die anomale Embryosackentwicklung bei « Euphorbia palustris » und anderen Euphorbiaceen*. Ibid. Bd. XXIX, 1911, p. 430.

(4) DESSIATOFF N., *Zur Entwicklung des Embryosackes von « Euphorbia virgata »* W. R. Ibid. Bd. XXIX, 1911, p. 33.

(5) ARNOLDI W., *Zur Embryologie einiger Euphorbiaceen*. « Travaux du Musée Bot. de l'Acad. imp. des Sc. de St.-Petersbourg », IX, 1912, p. 136.

(6) DONATI G., *Di alcune particolarità embriologiche in « Poinsettia pulcherrima »*, R. Grah. « Rendiconti R. Acc. Lincei » Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., Ser. V, Vol. XXI, 1° Semestre 1912, p. 512.

Id. — *Ricerche embriologiche sulle « Euphorbiaceae »*, « Annali di botanica », Vol. XI, 1913, p. 395.

(7) WENIGER W., *Developpement of embryosac and embryo in « Euphorbia Preeslii » and « Euphorbia splendens »*. « Bot. Gaz. », Vol. LXIII, 1917, p. 166.

Bohn ⁽¹⁾ ed attri, diversi tipi di costruzione del gametofito ♀. Riferendomi in particolare al genere *Euphorbia*, i tipi principali sono due: quello cosiddetto normale delle Angiosperme, in cui da una sola delle quattro megaspore prodotte dalla divisione riduzionale della cella madre ha origine un gametofito ottonucleato; e quello già riscontrato in parecchie specie appartenenti alle più disparate famiglie (Piperacee, Ulmacee, Malpighiaceae, Euphorbiaceae, Penaceae, Halorrhagidaceae, Apiaceae, Asteraceae) in cui tutte e quattro le megaspore, rappresentate soltanto dai loro nuclei (nuclei megasporiali), partecipano alla formazione di un gametofito sedicinucleato. Al primo tipo debbono ascriversi la maggior parte della specie di *Euphorbia* finora esaminate; al secondo invece soltanto *E. procera* e *E. palustris* ⁽²⁾.

In *E. pulcherrima* io misi tempo addietro in evidenza negli ovuli di alcuni fiori pistilliferi un comportamento che giudicai intermedio fra i due tipi principali suddetti, perchè tutte e quattro le megaspore, derivate dalla stessa cellula madre, nettamente separate fra di loro da una parete e disposte non in fila, come d'ordinario, ma in croce, iniziano la loro germinazione per produrre ciascuna un distinto gametofito; salvochè ad un certo momento una di esse prevalendo sulle altre, finisce con lo schiacciarle e produrre nel suo interno un tipico gametofito 8-nucleato. Le quattro megaspore di *E. pulcherrima*, che da principio tendono tutte a svilupparsi, potrebbero, a mio avviso, paragonarsi per il loro modo di comportarsi ai quattro nuclei megasporiali di *E. procera* e *E. palustris* ⁽³⁾.

Anche l'esempio offerto da *E. dulcis* deve ritenersi come un grado di passaggio fra i due tipi principali, benchè sostanzialmente diverso da quello di *E. pulcherrima*.

In *E. dulcis* si producono in luogo di quattro distinte megaspore come in *E. pulcherrima*, quattro nuclei megasporiali come in *E. procera* e *palustris*, e tutti partecipano a edificare il gametofito ♀, il quale a completo sviluppo non ha, come si potrebbe attendere, sedici nuclei, ma otto soltanto e con la stessa distribuzione e aspetto che nel gametofito ordinario delle Angiosperme.

Anche nel tipo *Lilium* il gametofito ♀ 8-nucleato proviene dal concorso di quattro nuclei megasporiali, perciò potrebbe sembrare da principio che

(1) BOHN R. R., *Sur le sac embryonnaire des Euphorbes*, « Bull. Soc. Bot. France », Vol. LXXI, 1924, p. 576.

(2) Il caso descritto da DESSIA TOFF in *E. virgata* R. K. sarebbe finora più unico che raro nelle Angiosperme, in quanto il gametofito 16-nucleato deriverebbe da una soltanto delle quattro megaspore prodotte dallo sporocito; è però lecito supporre che l'autore sia involontariamente caduto in un errore d'interpretazione.

(3) CARANO E., *Contribuzione alla embriologia delle Euphorbiacee*. « Rendic. R. Acc. Lincei ». Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., Ser. V, Vol. XXIV, 1° sem., 1915, p. 449.

Id. — *Sull'embriologia di « Poinsettia pulcherrima »*, R. Grah. « Annali di Botanica », Vol. XIII, 1915, p. 343.

E. dulcis seguisse il tipo *Lilium*; mentre in realtà le cose procedono nelle due piante in modo affatto differente.

In *Lilium* una coppia di nuclei megasporiali si porta ad un polo e l'altra al polo opposto del sacco, mentre nel centro compare un grande vacuolo. Per una ulteriore divisione dalla coppia micropilare hanno origine l'apparato oosferico e il nucleo polare superiore, dalla coppia calazale le tre antipodi e il nucleo polare inferiore.

In *E. dulcis* invece i quattro nuclei megasporiali dapprima in pila e a perfetto contatto fra di loro nella cavità della cellula madre lunga e sottile, coll'ingrandirsi di detta cavità si separano e precisamente fra il nucleo inferiore o micropilare e gli altri tre si stabilisce un grosso vacuolo, la cui comparsa determina definitivamente la polarità dei nuclei ed anche l'ulteriore loro destino: il nucleo superiore infatti produce da solo per due divisioni successive l'apparato oosferico ed uno dei nuclei polari; i tre nuclei inferiori invece, per un processo che non mi consta sia stato precedentemente illustrato per altre piante, generano le tre antipodi e l'altro nucleo polare.

Il processo consiste in ciò che i tre nuclei, dapprima ben distinti, si avvicinano, si toccano, subiscono una parziale fusione, al termine della quale se ne scorgono non più tre ma due soltanto, spesso con due ed anche con tre nucleoli ciascuno. Soltanto da questi due nuovi nuclei così prodotti, per una ulteriore divisione, ha origine la tetrade nucleale inferiore del sacco. Le tre antipodi sono cellule nettamente separate da pareti. I due nuclei polari s'incontrano e vengono a stretto contatto fra di loro, ma rimangono per molto tempo ben distinti, e anche quando si saldano, il nucleo di fusione si mostra ordinariamente lobato e binucleato.

L'aspetto del gametofito ♀ adulto è, come ho detto, perfettamente normale e nulla tradisce la particolare origine di esso, dal tutto differente da quella dell'ordinario gametofito 8-nucleato.

Fisiologia. — *Ancora sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli causate da soluzioni aventi diverso valore di pH.* Nota del Socio FIL. BOTTAZZI e di L. DE CARO⁽¹⁾.

I. ESPERIMENTI.

Il metodo di ricerca è stato lo stesso che abbiamo descritto nella nota precedente.

Resistenza elettrica di dischi di diaframma tenuti lungamente immersi in soluzioni aventi diverso valore di pH.

Messi dei pezzi di diaframma di cane in soluzioni di diverso valore di pH (soluzioni moderatrici) per un tempo di 20-24 ore, se ne determina quindi la resistenza elettrica.

(1) Vedi nota precedente in questi « Rendiconti », fasc. del 17 maggio 1925, p. 573.

Il muscolo naturalmente moriva, e assumeva il pH del liquido. Di questo, d'altro canto, non mutava sensibilmente la concentrazione in H^+ , data la sua natura di sistema moderatore, e il grande volume (50 cm³) in cui era adoperato, rispetto al piccolo volume complessivo del disco muscolare.

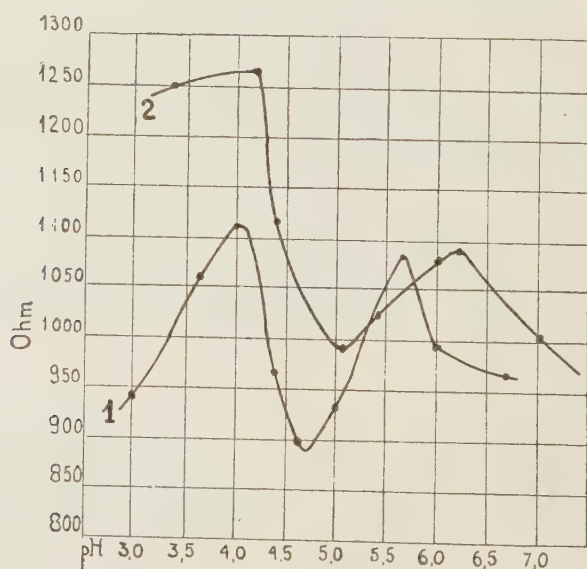
1) Soluzione di acido citrico e solfato monosodico:

pH = 3.0	r = 942,5	Ohm
» = 3.6	» = 1062,5	»
» = 4.0	» = 1013,0	»
» = 4.6	» = 889,5	»
» = 5.0	» = 928,5	»
» = 5.6	» = 1087,5	»
» = 6.0	» = 992,5	»
» = 6.6	» = 970,5	»
» = 7.0	» = 1285,0	»

2) Soluzione di acido acetico e acetato sodico:

pH = 3.4	r = 1266,1	Ohm
» = 3.7	» = 1206,1	»
» = 4.4	» = 1122,0	»
» = 4.7	» = 1035,9	»
» = 5.1	» = 995,2	»
» = 5.4	» = 1015,4	»
» = 6.0	» = 1056,8	»
» = 6.9	» = 780,0	»

I dati numerici forniti da questi esperimenti sono stati utilizzati per la costruzione delle curve della fig. 1.



1-Diaframma di cane (acido citrico + fosfato monosod.).
2- „ „ „ (acido acetico + acetato sodico.).

Fig. 1.

II. CONCLUSIONI ⁽¹⁾.

Dall'insieme degli esperimenti da noi fatti risulta evidentemente quanto segue:

1° Le membrane connettivali (omento, pericardio, centro tendineo del diaframma) presentano una resistenza elettrica molto minore della parte muscolare del diaframma. Probabilmente la differenza dipende in parte dal maggiore spessore di questa, in parte, anzi principalmente, dalle fibre muscolari, cioè dalla piccolissima permeabilità che esse presentano allo stato di riposo. E poichè le dette membrane connettivali presentano una piccolissima, quasi trascurabile diminuzione della resistenza elettrica dopo che sono state riscaldate per 10 minuti a 70° C, ne segue che la grande diminuzione di resistenza, che presenta in condizioni simili la membrana diaframmatica, è dovuta a un aumento di permeabilità delle sue fibre muscolari.

2° Singolare è l'andamento della resistenza elettrica del diaframma durante la sopravvivenza a temperatura costante (24,5° C): essa prima diminuisce un poco, poi aumenta considerevolmente, e infine presenta una diminuzione progressiva fortissima. Non è facile dare un'interpretazione soddisfacente dei due primi tratti delle curve, specie del secondo; mentre la progressiva diminuzione della resistenza elettrica, che rivela l'ultimo e più lungo tratto delle curve, sta senza dubbio a significare un progressivo aumento della permeabilità delle fibre muscolari coincidente con la progressiva disgregazione mortale degli elementi del tessuto.

3° Non meno singolare è il fatto, che tanto alla contrattura da caldo, quanto alla contrattura da freddo, e più ancora alla rigidità da caldo e da freddo, corrisponda una diminuzione della resistenza elettrica. Molto probabilmente, nell'uno come nell'altro caso, questa è l'espressione di un aumento della permeabilità delle fibre muscolari per gl'ioni. E questo aumento di permeabilità probabilmente è a sua volta effetto di un mutamento di stato dei colloidi delle fibre, consistente in una diminuzione di dispersità delle particelle colloidali, ossia in una più o meno grande aggregazione delle medesime, accompagnata da un certo grado di disimbibizione. A sostegno di questo modo di vedere sta il fatto, che non soltanto il riscaldamento, ma anche il raffreddamento produce aggregazione delle particelle colloidali, p. es. di quelle del siero di sangue e delle soluzioni di sieralbumina; e tanto più intensamente, quanto più povere di elettroliti le soluzioni proteiche sono, e quanto più vicine al punto isoelettrico si trovano le loro proteine.

Possiamo ammettere che, nel caso della contrattura e della rigidità da

(1) Queste si riferiscono anche ai risultati sperimentali contenuti nella nota precedente.

caldo, l'azione del calore sia coadiuvata da una maggiore formazione di acido lattico, che avvicina al punto isoelettrico le proteine muscolari. Lo stesso potremo dire della rigidità da freddo (causata da congelamento e disgelo del muscolo), sapendosi che anche in questo caso si forma molto acido lattico. Non altrettanto facile è spiegare la contrattura da freddo e l'aumento (sebbene meno cospicuo) di permeabilità del muscolo che l'accompagna, sapendosi che le basse temperature, fino a che non producono il congelamento del tessuto, non che provocare, inibiscono la formazione dell'acido lattico. In questo caso l'aggregazione delle particelle colloidali non può dirsi che sia agevolata da maggiore formazione di acido. Non resta quindi che ammettere, in prima linea, l'influenza della rallentata eliminazione dell'acido lattico (ossia dell'accumularsi nelle fibre di quello che ordinariamente vi si forma), dovuta alla bassa temperatura; ma poi anche l'influenza della bassa temperatura per se stessa, in quanto deprime la ionizzazione dei sali, così di quelli inorganici come di quelli proteici, e diminuisce la mobilità degli ioni, che è un fattore essenziale di stabilità per i colloidi in generale, in quanto contribuisce a mantenere alto il grado di dispersità delle loro particelle.

4° Circa l'influenza che esercitano le varie concentrazioni degli idrogenioni, abbiamo trovato che la resistenza elettrica del muscolo presenta un valore minimo in corrispondenza di un pH compreso fra 4,6 e 5,1. Ora questi valori di pH corrispondono precisamente a quelli trovati da Quagliariello⁽¹⁾ in corrispondenza dei quali i muscoli presentano il minimo di imbibizione, onde possono essere considerati come i valori di pH entro i quali cade il punto isoelettrico dei colloidi muscolari.

Da un lato e dall'altro dei valori detti la resistenza elettrica in certi casi decisamente aumenta, in altri prima aumenta, poi raggiunge un massimo e finalmente torna a scemare.

Il minimo d'imbibizione e il minimo di resistenza elettrica, in corrispondenza del punto isoelettrico, sono l'espressione di un'aggregazione delle particelle colloidali delle fibre muscolari, con la quale coincide un aumento della permeabilità di queste.

Non vogliamo però escludere che la diminuzione della resistenza elettrica del muscolo, in tutti i casi nei quali si presenta, possa dipendere, oltre che da aumento di permeabilità dovuto al mutamento di stato dei colloidi muscolari dianzi detto, anche da aumento di concentrazione degli ioni nel sistema causato da quel mutamento colloidale medesimo, sebbene debba ammettersi che, data l'aggregazione delle micelle colloidali nelle condizioni sperimentali descritte, un numero più o meno grande di ioni venga immobilizzato per adsorbimento da parte dei granuli via via che questi si vengono formando.

(1) G. QUAGLIARIELLO. *Imbibizione dei muscoli e teorie della contrazione muscolare*. « Archivio di Scienze Biologiche », vol. V, nn. 3-4, p. 443, 1924.

Biologia. — *Sull' imitazione dei più piccoli dettagli dei Microsporidi col fluosilicato di calcio.* Nota del Socio straniero A. L. HERRERA ⁽¹⁾.

In una mia Nota precedente ⁽²⁾ ho mostrato che il fluosilicato di calcio, ottenuto per diffusione lenta del cloruro di calcio in uno strato capillare di silicato e fluoruro di sodio produce dei precipitati periodici, dei quali le onde più piccole imitano le cellule naturali, e possono essere lavati, colorati e montati al balsamo di Canada, come le cellule naturali stesse. Spesso esse mostrano delle divisioni e delle figure mitotiche.

Avevo un poco abbandonato tali ricerche per studiare le imitazioni delle cellule colla metaformaldeide ⁽³⁾. Ricevo però una pubblicazione del sig. Roksabro Kudo ⁽⁴⁾, che io sono felice di presentare all'Accademia, e che mostra dei dettagli di struttura perfettamente paragonabili a quelli che io trovo nei miei preparati di fluosilicati e che sono visibili anche con grossi ingrandimenti. Mi sono quindi accinto a comparare le figure di Kudo con alcuni preparati conservati nel balsamo colorati all'ematossilina e che invio anche all'Accademia, per i confronti diretti, essendo i disegni e le microfotografie insufficienti a mostrare le strutture più delicate e trasparenti.

Ecco le spiegazioni ed i confronti fra le strutture naturali ed artificiali:

N. 4558 23 giugno 1923

Soluzione N. 4544 80 cm.³

Bifluoruro di potassio Merk gr. 0,800

Acqua 20 cm.³

La soluzione N. 4544 è stata preparata presso a poco secondo la formula della soluzione Raulin senza le sostanze organiche.

Silicato di sodio a 20° B 1500

Nitrato d'ammonio gr. 4,00

Carbonato di potassio » 0,60

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli alti studi biologici di México. Presentato nella seduta del 17 maggio 1925.

(2) A. L. HERRERA. *Importanza biologica dei fluosilicati*. Questi « Rendiconti », XXXII, 2°, p. 42.

(3) A. L. HERRERA. Questi « Rendiconti », gennaio 1925, p. 5.

(4) ROKSABRO KUDO. *A Biological and Taxonomic Study of the Microsporidia*. « Illinois Biological Monograph », Vol. IX, nn. 2 and 3.

Carbonato di magnesio	gr. 0,40
Solfato d'ammonio	» 0,25
Solfato di ferro	» 0,07
Solfato di zinco	» 0,07
Carbonato di manganese	» 0,07

Si mescola: la soluzione un po' torbida non viene filtrata.

Queste strutture sono state ingrandite a 1560 diametri.

Tavola II, figura 526 del lavoro di Kudo. Sporonte formato recentemente e suoi cambiamenti di *Thelohania bracteata*, secondo Strickland. Ingrandimento 1400 d.

Figura 536: stadi degli sporogoni di *Thelohania fibrata*, secondo Strickland. Ingrandimento 1400 d. Confrontarlo colla figura artificiale messa a lato.

Tavola IV, fig. 119: Meronti di diverse forme, e stadi di moltiplicazione di *Nosema apis* secondo Fantham e Porter. Ingrandimento 1500 d.

Tavola IV, fig. 160: Meronti in divisione di *Nosema bombicis*. Secondo Fantham e Porter. Ingr. 1300 d.

Tavola II, fig. 56: Diversi stadi di divisione del nucleo di *Nosema bryozoide*. Secondo Schröder.

Tavola VI, fig. 238: Cilindro primario binucleato di *Gluega anomala*. Secondo Weisenberg. Ingr. 2500 d.

Tavola I, fig. 5: Meronti in divisione binaria di *Nosema bombicis*. Secondo Stempel. Ingr. 2250 d.

Tavola II, fig. 60: *Nosema bryozoides*. Secondo Schröder.

Tavola XIV, fig. 533: Sporonte recentemente formato colla sostanza cromatica dispersa di *Thelohania fibrata*. Secondo Strickland. Ingr. 1400 d.

Tavola I, fig. 10: Meronte in divisione multipla di *Nosema bombicis*. Secondo Stempel. Ingr. 2250 d.

Tavola XXI, fig. 660: Stadi di *schizogonie* di *Octosporea muscae domestica*. Secondo Chatton e Krempf.

Tavola XXII, fig. 688: *Thelohania baetica*. Secondo Kudo. Ingr. 2400 d. Stadio di *schizogonia*.

Tavola IV, fig. 122: Meronti di diverse forme e stadi di moltiplicazione. Secondo Fantham e Poster. Ingr. 1500 d.

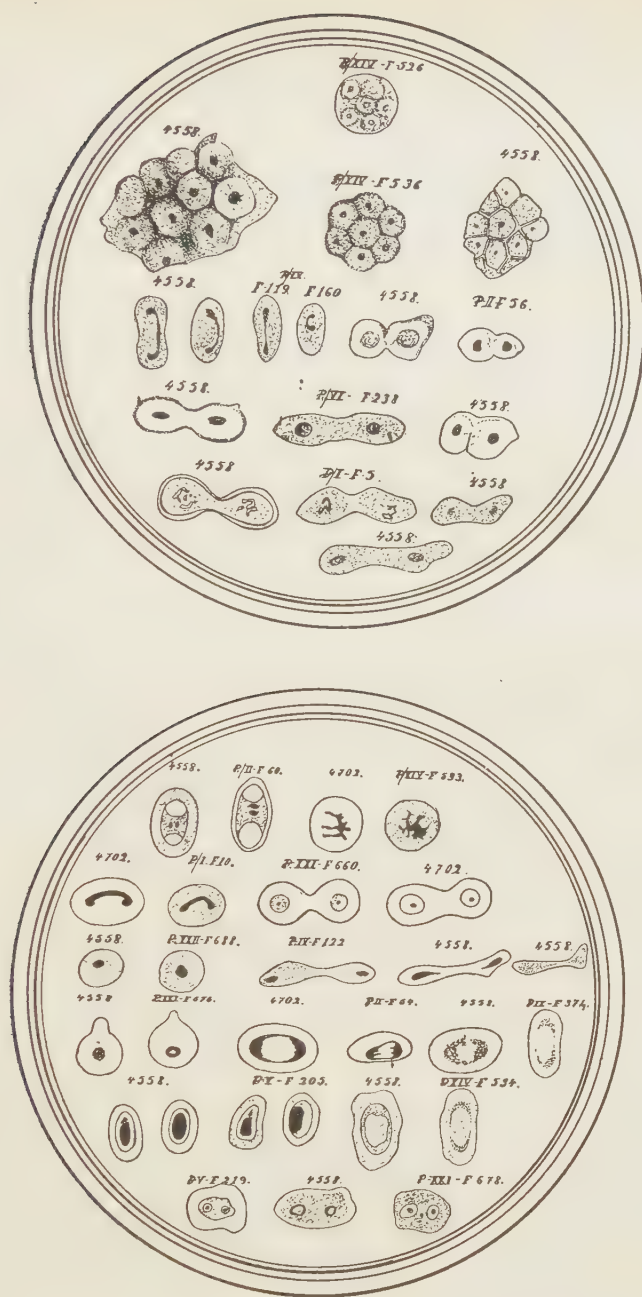
Tavola XXI, fig. 676: Spore di Gen. Incert. *holopedii*. Secondo Fritsch. Ingr. 900 d.

Tavola II, fig. 54: *Nosema bryozoides*. Secondo Braem. Diversi Stadi di divisione del nucleo.

Tavola IX, fig. 374: Stadi di *schizogonia* di *Gurleya francoltei*. Secondo Léger e Dubosc.

Tavola XIV, fig. 534: Stadi di *sporogonia* di *Thelohania fibrata*.

Tavola V, fig. 205: Spore di *Nosema baetis*. Secondo Kudo. Ingrandimento 2350 d.



AL Herrera.

Microsporidi e fluosilicati.

Ingrandimenti: fluosilicati 1560 D.

» microsporidi 600-3000 D.

Tavola V, fig. 219: *Glugea anomala*. Secondo Thelohan. Ingr. 2250 d.
Tavola XXI, fig. 678: Gen. inc. *geophili*. Secondo Crawlei.
Strutture artificiali N. 4702, 24 dicembre 1923.

Silicato di sodio a 20° B	cm. ³ 50
Fluoridrato di potassio Merck	gr. 2
Acqua distillata o sterilizzata	» 25

Si deposita tra un vetro resistente ed una membrana assai sottile di collodio. Pressione circa kg. 174,800. Temperatura 70°-75°. Diffusione lenta di cloruro di calcio solido, anidro, puro Merck.

Nel disegno (fig. 122) ciascuna figura naturale si trova accanto alla figura artificiale, e vi si può osservare che le analogie sono addirittura straordinarie. Tuttavia le strutture dei fluosilicati si induriscono e non evolvono ulteriormente. Queste analogie presentano un grande interesse e si prestano a numerose riflessioni. La rassomiglianza nella struttura e nelle dimensioni fa pensare che le cellule artificiali dovrebbero essere capaci di impadronirsi degli alimenti interni, e bisognerebbe cercare di coltivarle sugli stessi ospiti dei parassiti naturali.

Le figure ottenute colla soluzione Raulin modificata dovranno avere una composizione assai complicata forse esse hanno sintetizzato la materia organica (!). Ciò dovrà essere provato analiticamente; io non trovo che tracce di sostanza organica dovute forse all'impurezza inevitabile dei reattivi.

Queste strutture non contengono affatto nucleoproteine, e tuttavia essi assumono i colori istologici, ed i nuclei risultano colorati come se la cromatina avesse formato quei nuclei stessi.

Io sarei felice di sapere che l'Accademia dei Lincei volesse nominare una commissione per lo studio più approfondito di questi curiosi artefatti.

Essi imitano stranamente la vita, e forse in condizioni convenienti arriveranno a vivere di fatto e mostrare un metabolismo evidente se si arriva ad evitare l'indurimento.

Bisogna dimostrare che la vita non ha cominciato con infiltrazioni simili nelle rocce, a pressioni formidabili, che io sono impossibilitato a produrre nel mio laboratorio. La Commissione dovrebbe ottenere le figure con una pressione di 20000-30000 kg. ad una temperatura di 60°-70° per 24 ore almeno (1). Bisognerebbe impiegare dei vetri di un grande spessore che potessero essere necessariamente esaminati in microscopi speciali aventi una distanza adatta tra l'obiettivo e la patina.

(1) La pressa idraulica produce un movimento di rotazione sufficiente per rompere i vetri che contengono la soluzione. È necessaria una pressione verticale costante, uniforme senza rotazione e scorrimenti, con pesi e leve potenti.

Con una pressione di 300-400 kg. la soluzione di cloruro di calcio stenta a penetrare in uno strato così sottile, e bisognerà inventare un dispositivo delicato e chiuso per evitare la fuoruscita della soluzione dai bordi. Vinte queste difficoltà, il risultato potrà essere superbo. Infatti con strati capillari ottenuti con membrane sottilissime di collodio, ho ottenuto delle imitazioni così fine come le più delicate strutture della retina.

Sono pronto a dare tutte le spiegazioni a quei ricercatori che volessero perfezionare le mie ricerche.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli insiemi di funzioni analitiche.* Nota della dott. GIANNA CALZOLARI, presentata dal Socio Corrisp. L. TONELLI.

L'Arzelà dimostrò che, dato un insieme $\{f(x)\}$ di funzioni analitiche regolari nell'interno di un campo T e ugualmente limitate in T , in ogni campo completamente interno a T le funzioni $f(x)$ risultano ugualmente continue.

Questa proposizione fu poi generalizzata sostituendo alla condizione che le funzioni $f(x)$ siano ugualmente limitate in T quella che esse siano ugualmente limitate in ogni campo interno a T .

Ora questi teoremi non danno l'uguale continuità delle funzioni in tutto il campo, contorno compreso; ci sembra perciò utile stabilire la seguente proposizione:

« Sia T un campo connesso e chiuso, di cui indichiamo con C il contorno.

« Se si ha un insieme $\{f(x)\}$ di funzioni analitiche, regolari nell'interno di T e continue sul contorno C , e se le $f(x)$ sono tutte ugualmente limitate e ugualmente continue su C , esse sono ugualmente limitate e ugualmente continue in tutto T ».

Che le funzioni siano ugualmente limitate in tutto T risulta dal fatto che il massimo modulo di una funzione analitica regolare nell'interno di T e continua sul contorno C , è raggiunto su C .

Avendosi perciò, per tutte le $f(x)$, su C ,

$$|f(x)| \leq M,$$

con M costante indipendente dalla $f(x)$, questa disuguaglianza è verificata in tutto T .

Supponiamo che le $f(x)$ non siano ugualmente continue in tutto T .

Esisterà, allora, almeno un $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si prenda $\delta > 0$, si potrà sempre trovare almeno una delle funzioni $f(x)$, e due punti x' e x'' di T soddisfacenti alla

$$|x' - x''| < \delta,$$

in modo che risulti verificata la disuguaglianza

$$|f(x') - f(x'')| > \varepsilon.$$

Diamo successivamente a δ i valori: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, e sia $f_n(x)$ una funzione di $\{f(x)\}$, tale che per due punti x'_n e x''_n di T , soddisfacenti alla

$$(1) \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n},$$

sia

$$(2) \quad |f_n(x'_n) - f_n(x''_n)| > \varepsilon^{(1)}.$$

La successione

$$(3) \quad f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

è costituita da funzioni ugualmente limitate e ugualmente continue su C , e, per un noto teorema di Ascoli, secondo il quale da ogni successione di funzioni ugualmente limitate e ugualmente continue in un campo chiuso, ad una o più dimensioni, si può sempre estrarne un'altra convergente uniformemente in tutto il campo, si ha che da (3) si può sempre estrarre una successione

$$(4) \quad f_{r_1}, f_{r_2}, \dots, f_{r_n}, \dots$$

convergente uniformemente su tutto C .

Ora, come Weierstrass ha dimostrato, data una successione di funzioni, analitiche e regolari nell'interno di un campo T , e continue sul contorno C di questo campo, se questa successione converge uniformemente sopra il contorno C , essa converge uniformemente in tutto il campo verso una funzione analitica, regolare nell'interno di T e continua su C . Si ha dunque che la successione (4) converge uniformemente in tutto il campo T verso una funzione analitica $F(x)$, regolare nell'interno di T e continua su C .

(1) Per semplicità di dimostrazione, ammettiamo il principio delle infinite scelte arbitrarie.

Pertanto, si può determinare un $\lambda > 0$ tale che, se x' e x'' sono due punti qualsiasi di T , soddisfacenti alla

$$|x' - x''| < \lambda$$

sia

$$(5) \quad \left| F(x') - F(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Determiniamo poi un \bar{n} tale che, per ogni $n > \bar{n}$, sia

$$(6) \quad \left| f_{r_n}(x) - F(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

in tutto T .

Ora osserviamo che, essendo la (4) estratta dalla (3), è $r_n \geq n$, e quindi

$$\left| x'_{r_n} - x''_{r_n} \right| < \frac{1}{r_n} \leq \frac{1}{n}$$

e

$$(7) \quad \left| f_{r_n}(x'_{r_n}) - f_{r_n}(x''_{r_n}) \right| > \varepsilon.$$

Se dunque supponiamo, come è lecito di fare, $\bar{n} > \frac{1}{\lambda}$ ossia $\frac{1}{\bar{n}} < \lambda$, è, per ogni $n > \bar{n}$,

$$\left| x'_{r_n} - x''_{r_n} \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{\bar{n}} < \lambda$$

e, per le (5) e (6),

$$\begin{aligned} \left| f_{r_n}(x'_{r_n}) - f_{r_n}(x''_{r_n}) \right| &\leq \left| f_{r_n}(x'_{r_n}) - F(x'_{r_n}) \right| + \left| F(x'_{r_n}) - F(x''_{r_n}) \right| + \\ &+ \left| F(x''_{r_n}) - f_{r_n}(x''_{r_n}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

la quale vale per ogni $n > \bar{n}$, in contrasto con la (7). Ciò dimostra che è assurda l'ipotesi che le $f(x)$ non siano ugualmente continue in T .

Possiamo aggiungere:

« Se le $f(x)$ sono tutte analitiche regolari nell'interno del campo connesso e limitato T , e continue su C , e se, di più, esse sono tutte ugualmente limitate su C , condizione necessaria e sufficiente affinchè le $f(x)$ siano ugualmente continue in tutto T è che siano tali su C ».

Abbiamo già dimostrato che la condizione è sufficiente; che essa poi sia anche necessaria è evidente.

Per il teorema di Ascoli precedentemente richiamato si ha, infine, che « dato un insieme $\{f(x)\}$ di funzioni analitiche regolari nell'interno di T e continue sul contorno C , se le $f(x)$ sono tutte ugualmente limitate e ugualmente continue su C , da ogni successione estratta dall'insieme $\{f(x)\}$ se ne può sempre estrarre un'altra convergente uniformemente in tutto il campo, contorno compreso ».

Matematica. — *Sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie.* Nota del prof. MINEO CHINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

L'equazione differenziale:

$$(1) \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = X,$$

con X funzione della variabile x , s'incontra in questioni di Geometria infinitesimale o di Meccanica. Nel primo campo essa viene applicata, per esempio, alla determinazione delle geodetiche delle superficie di elemento lineare:

$$(2) \quad ds^2 = V \{ du^2 + (u + V_1)^2 dv^2 \},$$

con V e V_1 funzioni della sola variabile v ; giacchè, se

$$y = \varphi(v, C)$$

è l'integrale generale dell'equazione:

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = V,$$

le geodetiche delle corrispondenti superficie (2) hanno per equazione:

$$(3) \quad u \frac{\partial \varphi}{\partial C} + \frac{\partial}{\partial C} \int V_1 \sqrt{V - \varphi^2} dv = C'$$

con C' nuova costante arbitraria.

Inoltre è noto che, quando si prenda costante la funzione V_1 , l'elemento lineare (2) appartiene alle cosiddette superficie *spirali* ⁽¹⁾.

(1) Veggasi: DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Parte III, N. 621.

Uno dei pochi casi in cui si sa integrare l'equazione (1) è quello che ora indicherò, e che ritengo non ancora noto, cioè il caso in cui si abbia:

$$X = \operatorname{sen} \frac{2}{3} x,$$

o più generalmente:

$$X = c_1 \operatorname{sen} \frac{2}{3} x + c_2 \cos \frac{2}{3} x,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie (1).

Mostrerò che in tal caso si può dare l'espressione dell'integrale generale della (1) senza alcun segno di quadrature, ed anzi con sole funzioni circolari (seni e coseni). Conseguentemente, ho potuto stabilire - con l'indicazione di una sola quadratura - l'equazione delle geodetiche delle superficie di elemento lineare:

$$ds^2 = \operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cdot \left\{ du^2 + (u + V_1)^2 dv^2 \right\}$$

*
* *

Osserviamo dapprima che, se nella (1) si fa la sostituzione

$$(4) \quad y = \chi \sqrt{\frac{X}{1 + \chi^2}},$$

(1) Se sappiamo integrare la (1) quando sia

$$X = \operatorname{sen} \frac{2}{3} x,$$

sapremo integrarla anche per

$$X = c_1^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3} x + c_2 \right),$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie; giacchè in quest'ultimo caso basterebbe nella (1) cambiare y in $c_1 y$ e x in $x - \frac{3}{2} c_2$ per ricadere nel caso precedente. Ne segue che sapremo pure integrarla quando sia:

$$X = c_1 \operatorname{sen} \frac{2}{3} x + c_2 \cos \frac{2}{3} x$$

Si osservi ancora che ogni equazione del tipo

$$a y^2 + b y'^2 = c,$$

con a , b , c , funzioni della sola variabile indipendente, è riducibile alla forma (1) mediante un semplice cambiamento della variabile stessa.

si ottiene come equazione trasformata l'altra:

$$(5) \quad \frac{d\zeta}{dx} = (1 + \zeta^2) \left(1 - \frac{X'}{2X} \zeta \right),$$

cioè:

$$(6) \quad \frac{d\zeta}{dx} = (1 + \zeta^2) (1 + a \zeta),$$

con a funzione di x .

L'equazione (6) - nella quale si potrebbero subito separare le variabili quando a fosse costante - appartiene a quelle, più generali, della forma:

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{dx} = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3,$$

con a_0, a_1, a_2, a_3 funzioni di x ⁽¹⁾. E se in questa facciamo la sostituzione

$$\zeta = \lambda u + \alpha,$$

con λ e α funzioni di x da scegliersi convenientemente, otteniamo come equazione trasformata l'altra:

$$\lambda \frac{du}{dx} = \left[f(\alpha) - \frac{d\alpha}{dx} \right] + \left[\lambda f'(\alpha) - \frac{d\lambda}{dx} \right] u + \frac{\lambda^2 f''(\alpha)}{2} u^2 + \lambda^3 a_3 u^3,$$

avendo posto:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3, \quad f'(\alpha) = a_1 + 2 a_2 \alpha + 3 a_3 \alpha^2, \\ f''(\alpha) = 2(a_2 + 3 a_3 \alpha).$$

Ora, quando sia possibile scegliere α in guisa che si abbia simultaneamente

$$f''(\alpha) = 0, \quad f(\alpha) - \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

cioè, quando la funzione

$$\alpha = - \frac{a_2}{3 a_3}$$

(1) Sull'equazione (7) veggasi:

R. LIOUVILLE, *Sur quelques équations différentielles non linéaires*, « Journal de l'École polytechnique », A. 1887, 57^e cahier, pp. 232-240.

Veggansi pure due mie Note dal titolo: *Sopra una particolare equazione differenziale del primo ordine*; la prima inserita nei « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », an. 1903; la seconda negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1904.

Infine, un altro mio recente lavoro: *Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali del primo ordine*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », an. 1924.

sia un integrale della (7), la precedente equazione trasformata diventerà:

$$\frac{du}{dx} = \left[f'(\alpha) - \frac{\lambda'}{\lambda} \right] u + \lambda^2 a_3 u^3.$$

Ed allora, se prendiamo:

$$\lambda = e^{\int f'(\alpha) dx}$$

quest'ultima equazione si ridurrà all'altra:

$$\frac{du}{u^3} = a_3 \lambda^2 dx,$$

il cui integrale generale è:

$$\frac{1}{u^2} = C - 2 \int a_3 \lambda^2 dx,$$

con C costante arbitraria.

Concludiamo pertanto: *Se nell'equazione (7) i coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 sono funzioni di x scelte in guisa che l'espressione*

$$-\frac{a_2}{3a_3}$$

risulti un integrale particolare dell'equazione stessa ⁽¹⁾, l'integrale generale sarà:

$$(8) \quad z = \lambda \left(C - 2 \int a_3 \lambda^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a_2}{3a_3},$$

con

$$\lambda = e^{\int \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3} \right) dx}.$$

Nel caso speciale dell'equazione (6), avremo:

$$-\frac{a_2}{3a_3} = -\frac{1}{3a}.$$

Perciò, la precedente condizione diventerà:

$$\frac{da}{dx} = 2 \left(a^2 + \frac{1}{9} \right).$$

(1) Cioè, se tra quei coefficienti passa la relazione:

$$a_0 a_3^2 + \frac{1}{3} (a_2' a_3 - a_2 a_3' - a_1 a_2 a_3) + \frac{2}{27} a_2^3 = 0$$

Da cui si ricava:

$$a = \frac{1}{3} \operatorname{tang} \left(\frac{2}{3} x + C \right).$$

O ciò che è lo stesso:

$$a = -\frac{1}{3} \cot \left(\frac{2}{3} x + C \right),$$

con C costante arbitraria.

Possiamo dunque dire che, se nell'equazione (6) prendiamo:

$$(9) \quad a = -\frac{1}{3} \cot \frac{2}{3} x,$$

il suo integrale generale risulterà espresso dalla relazione (8), nella quale si faccia:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = a, \quad \lambda = e^{\int \left(a - \frac{1}{3a} \right) dx} = \frac{1}{\cos \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{\sin \frac{2}{3} x \cos \frac{2}{3} x}}.$$

E poichè risulta:

$$\int a_3 \lambda^2 dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{2}{3} x \cos^2 \frac{2}{3} x} = \cot \frac{4}{3} x,$$

concludiamo che l'integrale generale dell'equazione (6), quando il coefficiente a abbia l'espressione (9), è:

$$\chi = \frac{1}{\cos \frac{2}{3} x \sqrt{\sin \frac{2}{3} x \cos \frac{2}{3} x}} \left(C - 2 \cot \frac{4}{3} x \right)^{-\frac{1}{2}} + \tan \frac{2}{3} x.$$

Ossia:

$$\chi \cos \frac{2}{3} x = \sin \frac{2}{3} x + \left(C \sin \frac{4}{3} x - \cos \frac{4}{3} x \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ed ora, osservando che l'equazione (5), nella quale si trasforma la (1) mediante la sostituzione (4), rientra nel caso precedente quando si prenda:

$$X = \sin \frac{2}{3} x,$$

concludiamo:

L'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{sen} \frac{2}{3} x$$

è espresso dalla relazione:

$$y \cos \frac{2}{3} x = \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} x - y^2} \left\{ \operatorname{sen} \frac{2}{3} x + \left(C \operatorname{sen} \frac{4}{3} x - \cos \frac{4}{3} x \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Detto integrale, dopo alcune trasformazioni, può scriversi:

$$y = \frac{\left(1 + M \operatorname{sen} \frac{2}{3} x\right) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} x}}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} x + M^2}},$$

avendo posto:

$$M = \sqrt{C \operatorname{sen} \frac{4}{3} x - \cos \frac{4}{3} x}.$$

Questo risultato, tenendo presente quanto fu detto al principio, ci permette di concludere:

L'equazione generale delle geodetiche di ogni superficie di elemento lineare:

$$ds^2 = \operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cdot \left\{ du^2 + (u + V_1)^2 dv^2 \right\}$$

è rappresentato dalla (3), nella quale si prenda:

$$V = \operatorname{sen} \frac{2}{3} v \quad \varphi = \frac{\left(1 + M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v\right) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v}}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2}},$$

ed essendo ora:

$$M = \sqrt{C \operatorname{sen} \frac{4}{3} v - \cos \frac{4}{3} v}.$$

E poichè si ha:

$$\sqrt{V - \varphi^2} = \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v} \cos \frac{2}{3} v \cdot \frac{M}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2}},$$

concludiamo che l'equazione delle suddette geodetiche è la seguente:

$$u \sqrt{\sin \frac{2}{3} v} \cdot \frac{\partial}{\partial C} \frac{1 + M \sin \frac{2}{3} v}{\sqrt{1 + 2 M \sin \frac{2}{3} v + M^2}} + \\ + \frac{\partial}{\partial C} \int V_1 \cos \frac{2}{3} v \sqrt{\sin \frac{2}{3} v} \cdot \frac{M dv}{\sqrt{1 + 2 M \sin \frac{2}{3} v + M^2}} = C'.$$

Per ognuna di tali superficie (cioè per ogni espressione di V_1) le geodetiche si ottengono quindi con una sola quadratura.

Infine si osservi che un caso evidente d'integrabilità della (5) è quello in cui si prenda

$$X = e^{2kx},$$

con k quantità costante. Esso corrisponde all'ipotesi che nella (6) sia a costante; nel quale caso si potranno subito in questa equazione separare le variabili e di essa esprimere, in termini finiti, l'integrale generale. Conseguentemente, si sapranno determinare, pure con una sola quadratura, come nel caso precedente, le geodetiche delle superficie di elemento lineare:

$$ds^2 = e^{2kv} \{ du^2 + (u + V_1)^2 dv^2 \}.$$

Matematica. — *Sulle algebre complesse legate ai gruppi di ordine finito.* Nota del prof. GAETANO SCORZA presentata dal Socio CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

Sia G un gruppo di ordine n , con gli elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, A un'algebra complessa legata a G ⁽²⁾, e Γ una rappresentazione irriducibile di G sopra un gruppo di matrici, di ordine p , a elementi complessi. Inoltre si supponga che u_1, \dots, u_n sia un aggregato di unità di A , per le quali, conformemente alle ipotesi fatte, si abbia $u_r u_s = u_t$ ogni qual volta sia $\gamma_r \gamma_s = \gamma_t$, e che per Γ all'elemento corrente γ_r di G corrisponda la matrice

$$\Lambda_r = \left\| \lambda_{i,j}^{(r)} \right\| \quad (i, j = 1, \dots, p).$$

(1) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

(2) Per le proprietà fondamentali delle algebre legate ai gruppi di ordine finito vedi:

a) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), p. 437 e seg.; G. FICHERA, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari* (« Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », serie 5ª, vol. XIII).

Allora risulta dalla Memoria già citata del sig. Fichera che fra le sotto-algebre invarianti regolari di A (il cui numero eguaglia quello dei sistemi di elementi coniugati di G) ne esiste una, ed una sola, Z , di ordine p^2 — che diremo *corrispondente* a Γ — tale che, se z_r è la *componente*⁽¹⁾ di u_r in Z , è possibile fissare in Z un aggregato *normale* di p^2 unità $z_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, p$)⁽²⁾, rispetto a cui risulti

$$z_r = \sum_{i,j}^{1 \dots p} \lambda_{i,j}^{(r)} z_{i,j} \quad (3).$$

Ora si può domandare:

Date le unità u_1, \dots, u_n e le matrici $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, come determinare effettivamente la sotto-algebra Z corrispondente a Γ ?

La risposta a questa domanda potrebbe esser dedotta con grande rapidità ponendo a raffronto le ricerche del sig. Fichera con altre, notevolissime, dello Schur⁽⁴⁾ e dello Speiser⁽⁵⁾; ma qui vogliamo far vedere come, senza allungar di troppo le cose, si possa procedere in modo da trovare insieme e la risposta voluta e nuove dimostrazioni di quattro bei teoremi dello Schur e dello Speiser, dimostrazioni che, inquadrandoli nella teoria delle algebre legate ai gruppi, ne fanno trasparir chiara l'intima essenza.

*
* *

1. Si indichi con $\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)}$ il reciproco di $\lambda_{i,j}^{(r)}$ in Λ_r e si ponga

$$\bar{\Lambda}_r = \left\| \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} \right\| \quad (i, j = 1, \dots, p),$$

di guisa che le matrici Λ_r e $\bar{\Lambda}_r$ saranno reciproche e ciascuna sarà la trasposta dell'inversa dell'altra.

Dico allora che:

L'algebra richiesta Z è il sistema V generato dagli elementi

$$(1) \quad v_{i,j} = \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r \quad (i, j = 1, \dots, p)$$

e che:

(1) Per questa denominazione vedi loc. cit. (2), b), n. 5.

(2) Diciamo che l'aggregato delle unità $z_{i,j}$ di Z è *normale*, per significare che il prodotto $z_{i,j} z_{l,m}$ è nullo per $l \neq j$, è $z_{i,m}$ per $l = j$.

(3) Dopo di che è ben chiaro che di aggregati normali così fatti non ne esiste che uno, perchè fra le z_r se ne possono scegliere p^2 che siano indipendenti.

(4) J. SCHUR, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* (« Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften », 1902, pp. 406-432).

(5) A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlin, Springer, 1923), § 48.

In essa le unità $z_{i,j}$ si ottengono prendendo

$$(2) \quad z_{i,j} = \frac{p}{n} v_{i,j}.$$

È chiaro intanto che, facendo corrispondere all'elemento γ_r di G la matrice $\bar{\Lambda}_r$ ($r = 1, \dots, n$), si ottiene una rappresentazione $\bar{\Gamma}$ di G irriducibile al pari di Γ ; quindi, per un classico teorema del Burnside⁽¹⁾, la caratteristica della matrice

$$\|\bar{\lambda}_{1,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{1,p}^{(r)}, \bar{\lambda}_{2,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{2,p}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{p,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{p,p}^{(r)}\| \quad (r = 1, \dots, n)$$

è p^2 . Ma allora è tale anche quella della matrice trasposta, cioè della matrice le cui righe sono costituite dalle coordinate delle $v_{i,j}$ rispetto alle u_r ; quindi le $v_{i,j}$ sono indipendenti e il sistema V è dell'ordine p^2 .

Dalla (1), moltiplicando a destra per u_s , si trae

$$v_{i,j} u_s = \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r u_s;$$

ma, se si pone

$$(3) \quad \gamma_r \gamma_s = \gamma_t$$

riesce $u_r u_s = u_t$ e $\bar{\Lambda}_r \bar{\Lambda}_s = \bar{\Lambda}_t$, indi $\bar{\Lambda}_r = \bar{\Lambda}_t \bar{\Lambda}_s^{-1}$ e

$$\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = \sum_h^{1 \dots p} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)} \lambda_{j,h}^{(s)};$$

quindi è

$$v_{i,j} u_s = \sum_r^{1 \dots n} \sum_h^{1 \dots p} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)} \lambda_{j,h}^{(s)} u_t = \sum_h^{1 \dots p} \lambda_{j,h}^{(s)} \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)} u_t.$$

D'altronde, per il legame posto fra gli indici r e t dalla (3), si ha

$$\sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)} u_t = \sum_t^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)} u_t = v_{i,h};$$

dunque resta

$$(4) \quad v_{i,j} u_s = \sum_h^{1 \dots p} \lambda_{j,h}^{(s)} v_{i,h}.$$

In modo del tutto simile si vede che è

$$(5) \quad u_s v_{i,j} = \sum_h^{1 \dots p} \lambda_{h,i}^{(s)} v_{h,j}.$$

(1) Per una dimostrazione di questo teorema dal punto di vista della teoria delle algebre legate ai gruppi vedi loc. cit. (2), b), n. 16.

Dalle (4) e (5) segue che i prodotti VA e AV sono contenuti in V; ma è pure $V \neq 0$, quindi è dimostrato intanto che V è una sotto-algebra invariante di A.

Adesso poniamo per comodità di scrittura

$$v_{i,j;l,m} = \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} \quad (i, j, l, m = 1 \dots, p).$$

Tenendo conto delle (1) e (4), o delle (1) e (5) si deduce

$$\begin{aligned} (6) \quad v_{i,j} v_{l,m} &= v_{i,j} \cdot \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} u_r = \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} v_{i,j} u_r = \\ &= \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} \sum_b^{1 \dots p} \lambda_{j,b}^{(r)} v_{i,b} = \sum_b^{1 \dots p} v_{j,b;l,m} v_{i,b}, \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} (7) \quad v_{i,j} v_{l,m} &= \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r \cdot v_{l,m} = \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r v_{l,m} = \\ &= \sum_r^{1 \dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} \sum_b^{1 \dots p} \lambda_{b,l}^{(r)} v_{b,m} = \sum_b^{1 \dots p} v_{b,l;i,j} v_{b,m}; \end{aligned}$$

quindi è

$$\sum_b^{1 \dots p} v_{j,b;l,m} v_{i,b} = \sum_b^{1 \dots p} v_{b,l;i,j} v_{b,m},$$

e, attesa l'indipendenza delle $v_{i,j}$, si ha

$$(8) \quad v_{j,m;l,m} = v_{i,l;i,j},$$

$$(9) \quad v_{j,b;l,m} = 0 \quad , \quad \text{per } b \neq m,$$

e

$$(10) \quad v_{b,l;i,j} = 0 \quad , \quad \text{per } b \neq i.$$

Le (9) e (10) significano che il numero $v_{i,j;l,m}$ è zero, se è $l \neq i$, oppure $m \neq j$; la (8), che per $l = j$ diviene

$$v_{j,m;j,m} = v_{i,j;i,j},$$

mostra che il valore di $v_{j,m;j,m}$ è indipendente da m e quello, ad esso eguale, di $v_{i,j;i,j}$ è indipendente da i , ossia, in definitiva, che i p^2 simboli del tipo $v_{i,j;i,j}$ rappresentano numeri tutti eguali; quindi, indicato con ρ un numero opportuno, che sarà subito calcolato, si avrà

$$(11) \quad v_{i,j;l,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq i \quad , \quad \text{oppure } m \neq j, \\ \rho, & \text{se } l = i \quad \text{ed } m = j; \end{cases}$$

dopo di che le (6) e (7) si accorderanno nel dare

$$(12) \quad v_{i,j} v_{l,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq j, \\ \rho v_{i,m}, & \text{se } l = j. \end{cases}$$

Giacchè il valore di $v_{i,j;i,j}$ al variare di i e j è costantemente ρ , si ha

$$\sum_{i,j}^{1 \dots p} v_{i,j;i,j} = p^2 \rho;$$

ma è pure

$$\sum_{i,j}^{1 \dots p} \lambda_{i,j}^{(r)} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = p,$$

e quindi

$$\sum_{i,j}^{1 \dots p} v_{i,j;i,j} = \sum_{i,j}^{1 \dots p} \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = \sum_r^{1 \dots n} \sum_{i,j}^{1 \dots p} \lambda_{i,j}^{(r)} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = np;$$

dunque resta

$$p^2 \rho = np \quad , \quad \text{ossia } \rho = \frac{n}{p};$$

e le (11) e (12) diventano

$$(13) \quad v_{i,j;l,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq i \quad , \quad \text{oppure } m \neq j, \\ \frac{n}{p}, & \text{se } l = i \quad \text{ed } m = j; \end{cases}$$

e

$$(14) \quad v_{i,j} v_{l,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq j, \\ \frac{n}{p} v_{i,m}, & \text{se } l = j. \end{cases}$$

Dalla (14), posto

$$(15) \quad v_{i,j}^* = \frac{p}{n} v_{i,j},$$

si trae

$$(16) \quad v_{i,j}^* v_{l,m}^* = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq j, \\ v_{i,m}^*, & \text{se } l = j; \end{cases}$$

dunque V è regolare e per essa le $v_{i,j}^*$ costituiscono un aggregato normale di unità.

Ora, conformemente alla circostanza che V è invariante in A , poniamo

$$A = V \dot{+} W,$$

dove $\dot{+}$ è segno di somma diretta, e

$$u_r = v_r + w_r,$$

con v_r in V e w_r in W .

Sarà, per la (4) e la (15),

$$v_{l,m}^* (v_r + w_r) = \sum_b^{1 \dots p} \lambda_{m,b}^{(r)} v_{l,b}^*,$$

e quindi, essendo $VW = 0$,

$$v_{l,m}^* v_r = \sum_b^{1 \dots p} \lambda_{m,b}^{(r)} v_{l,b}^*.$$

Intanto, se rispetto alle unità $v_{i,j}^*$ si pone

$$v_i = \sum_{i,j}^{1 \dots p} \mu_{i,j}^{(r)} v_{i,j}^*,$$

si ha, per la (16),

$$v_{l,m}^* v_r = \sum_{i,j}^{1 \dots p} \mu_{i,j}^{(r)} v_{l,m}^* v_{i,j}^* = \sum_j^{1 \dots p} \mu_{m,j}^{(r)} v_{l,j}^* = \sum_b^{1 \dots p} \mu_{m,b}^{(r)} v_{l,b}^*,$$

dunque è

$$\mu_{m,b}^{(r)} = \lambda_{m,b}^{(r)} \quad (m, b = 1, \dots, p)$$

e per conseguenza

$$v_r = \sum_{i,j}^{1 \dots p} \lambda_{i,j}^{(r)} v_{i,j}^*.$$

Si conclude che veramente V è la richiesta algebra Z , che le v_r sono le componenti z_r , di cui nelle dichiarazioni introduttive, e che in Z le unità $v_{i,j}$ sono date dalle $v_{i,j}^*$, cioè dalla (2).

Occorre appena avvertire che, come l'algebra Z corrispondente a Γ è generata dagli elementi $v_{i,j}$, così l'algebra \bar{Z} corrispondente a $\bar{\Gamma}$ è quella generata dagli elementi

$$\bar{v}_{i,j} = \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} u_r$$

e che per questi è ancora

$$(17) \quad \bar{v}_{i,j} v_{l,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq j, \\ \frac{n}{p} \bar{v}_{i,m}, & \text{se } l = j. \end{cases}$$

2. Adesso sia Γ' una rappresentazione irriducibile di G la quale si ottenga facendo corrispondere all'elemento corrente γ_r di G la matrice a elementi complessi di ordine p'

$$\Lambda_{r'} = \left\| \lambda_{i',j'}^{(r)} \right\| \quad (i', j' = 1, \dots, p');$$

e, indicata con $\bar{\Gamma}'$ la rappresentazione avente per Γ' il significato che $\bar{\Gamma}$ ha

per Γ , siano Z' e Z' le sotto-algebre invarianti regolari di A corrispondenti a Γ' e $\bar{\Gamma}'$.

Supposto che le $\bar{z}'_{i',j'}$ siano per Γ' e Z' , ciò che le $z_{i,j}$ sono per Γ e Z , la componente di u_r in Z' è

$$z'_r = \sum_{i',j'}^{1 \dots p'} \lambda_{i',j'}^{(r)} \bar{z}'_{i',j'};$$

e per conseguenza quella di

$$\bar{v}_{i,j} = \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} u_r$$

è

$$\sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \sum_{i',j'}^{1 \dots p'} \lambda_{i',j'}^{(r)} \bar{z}'_{i',j'}.$$

Ma, essendo $\bar{v}_{i,j}$ un elemento di \bar{Z} , quest'ultima componente è nulla quando \bar{Z} e Z' sono diverse, cioè quando Γ' e $\bar{\Gamma}$ non sono equivalenti; dunque:

Se Γ' non è equivalente a Γ , è

$$(18) \quad \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \lambda_{i',j'}^{(r)} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p; i', j' = 1, \dots, p').$$

Quando Z e Z' sono distinte, ossia quando $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Gamma}'$, indi Γ e Γ' non sono equivalenti, è $\bar{Z} \bar{Z}' = 0$.

Ora $\bar{v}_{i,j}$ è un elemento di Z , e

$$\bar{v}'_{i',j'} = \sum_r^{1 \dots n} \lambda_{i',j'}^{(r)} u_r$$

e un elemento di \bar{Z}' , dunque:

Se Γ' non è equivalente a Γ , è

$$(19) \quad \bar{v}_{i,j} \bar{v}'_{i',j'} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p, i', j' = 1, \dots, p').$$

Dei quattro teoremi cui è stato alluso più sopra quelli dovuti allo Schur sono espressi dalle (13) e (18), quelli dovuti allo Speiser, dalle (14) e (19).

Astrofisica. — *Un nuovo interferometro stellare.* Nota ⁽¹⁾ del dott. VASCO RONCHI, presentata dal Socio A. GARBASSO ⁽²⁾.

La luce di una stella (celeste o artificiale) cada sopra un sistema ottico convergente, in modo che ne emergano onde sferiche in un punto reale F (fig. 1). Per semplicità di esposizione, supponiamo che si tratti di un obbiettivo, o che la stella sia a distanza infinita, in modo che F coincida col fuoco.

Un reticolo R a tratti rettilinei, interposto sul cammino dell'onda emergente, la scinde in numerose onde diffratte, che possiamo raccogliere sopra uno schermo HK normale all'asse dell'obbiettivo. Per semplicità poniamo anche il reticolo normale all'asse.

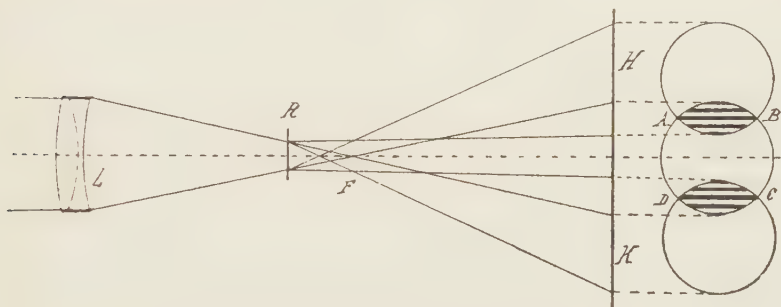


Fig. 1.

Se l'obbiettivo ha il contorno circolare, come di solito, la zona luminosa centrale, sullo schermo, corrispondente all'onda diretta, è circolare e le altre sono dei dischi che, coll'approssimazione sufficiente per il nostro scopo, si possono considerare circolari e uguali al disco centrale.

Chiamando:

f = la distanza focale dell'obbiettivo;

α = la semiapertura angolare dell'onda sferica considerata;

β = l'angolo di cui sono ruotate una sull'altra le onde diffratte dal reticolo;

λ = la lunghezza d'onda della luce adoperata;

m = la frequenza del reticolo (= numero dei tratti per unità di lunghezza);

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Firenze-Arcetri.

(2) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

y = la distanza fra il reticolo e il centro F dell'onda, contata in senso contrario a quello di propagazione della luce;

x = la distanza fra F e lo schermo, contata in senso contrario ad y ;

H = il raggio dell'orlo dell'obbiettivo;

r = il raggio del disco centrale sullo schermo;

s = lo spostamento di un disco rispetto all'altro sullo schermo;
si hanno le relazioni:

$$\beta = \lambda m \quad , \quad s = \beta (x + y)$$

valide per valori di m non molto grandi, come del resto sono quelli che si richiedono nei casi comuni.

Supponiamo il reticolo così vicino ad F che y sia trascurabile rispetto ad x ; allora

$$s = x\beta \quad , \quad r = \alpha x .$$

Per $\beta = 2\alpha$ i vari dischi sono tangenti esternamente; per $\alpha < \beta < 2\alpha$, in parte si sovrappongono, dando luogo a frangie sensibilmente rettilinee, parallele ed equidistanti di frequenza $M = my/x$. Quando $\beta = \alpha$ sono tangenti fra loro le onde di primo ordine; e per $\beta < \alpha$ i vari dischi si sovrappongono per aree sempre maggiori, dando luogo a configurazioni sempre più complesse.

Scegliendo un opportuno valore di x si può far sì che r sia uguale al raggio H dell'obbiettivo; e la figura che in queste condizioni si vede sullo schermo è quella stessa che si vede ad occhio nudo guardando l'obbiettivo di dietro il reticolo, in modo che tutto il fascio luminoso entri nella pupilla.

Se il reticolo si sposta nel proprio piano in una direzione normale ai tratti, anche le frangie si spostano nella stessa direzione, e quando il reticolo si è spostato di un tratto uguale al suo periodo $1/m$, le frangie si sono spostate di una intera frangia, perchè tutto deve tornare nelle condizioni iniziali. Il fatto si spiega subito colla variazione della differenza di fase che esiste fra i centri delle varie onde diffratte.

Si può dire che sotto questo rapporto le frangie si comportano come se fossero l'ombra del reticolo.

Se sull'obbiettivo arrivano le onde luminose di due stelle, supponiamo ugualmente intense, distanti angolarmente di γ , si formano due sistemi di frangie spostati uno sull'altro di tante frangie quanti sono i tratti t di reticolo, supposto nel piano focale, compresi fra le immagini delle due stelle; e quando t è un intero, i due sistemi si sovrappongono, diciamo, *in fase* e le frangie appaiono nette, mentre il campo appare uniforme quando t è un numero dispari di mezzi tratti, perchè le frangie chiare di un sistema coincidono con quelle oscure dell'altro. Configurazioni intermedie si presentano

quando il numero dei semitratti compresi fra le immagini delle sorgenti è frazionario e quando le sorgenti stesse hanno diversa intensità.

Una volta data la frequenza del reticolo, m , possiamo determinare qual'è il minimo valore di γ sensibile con questo dispositivo: infatti, poichè quando i tratti sono orientati ad angolo retto sulla congiungente le due stelle, le frangie svaniscono tutte le volte che $\gamma = (2k - 1)/2m$, con $k = 1, 2, \dots$, il valor minimo di γ è $\gamma = 1/2mf$.

Però non tutte le frequenze possono esser adoperate con un dato obbiettivo, perchè quando $m = 2\alpha/\lambda$, come si è detto, le frangie non si possono più formare; ma con un reticolo leggermente più rado, se ne hanno già abbastanza per poterle esaminare comodamente. Le condizioni più favorevoli si ottengono con $m = \alpha/\lambda$, perchè allora ogni onda si sovrappone per metà sulle adiacenti, ma non è necessario arrivare a un valore così basso. Mettendoci nelle condizioni limiti, il minimo valore di γ osservabile con un dato obbiettivo è:

$$\gamma = \lambda/4 \alpha f = \lambda/4 H.$$

Per valori inferiori di λ , le frangie presentano ancora un massimo e un minimo di nettezza per due orientazioni ad angolo retto, ma anche nel caso più favorevole, cioè quando le stelle hanno la stessa intensità, non si arriva mai alla completa scomparsa. In questo modo si possono apprezzare valori di γ piccolissimi fino ad un limite che dipende troppo dalle condizioni sperimentali per poterlo stabilire anche all'ingrosso.

Una volta dato il reticolo, qualunque sia la sua frequenza, purchè inferiore al limite stabilito, le frangie sono sempre nitide quando i tratti sono paralleli alla congiungente le due stelle: ruotando il reticolo nel suo piano, le frangie presentano in generale diversi massimi e minimi di nettezza, a seconda della distanza angolare γ . Come si è detto sopra, quando $\gamma < 1/2mf$, si ha un minimo per $\varphi = 90^\circ$ e un altro per $\varphi = 270^\circ$, con un massimo per $\varphi = 180^\circ$, chiamando φ l'angolo di cui è ruotato il reticolo a partire dalla posizione di parallelismo; però anche supponendo uguali le intensità delle due stelle, non si ha mai la scomparsa completa delle frangie; questa si ha per $\gamma = 1/2mf$; e, se $\gamma > 1/2mf$, per tutti quei valori di φ per cui:

$$\gamma \sin \varphi_{2k-1} = (2k - 1)/2mf \quad (k = 1, 2, \dots)$$

e perciò, in ogni quadrante si hanno tanti minimi quanti sono i valori interi di k che soddisfano alla diseuguaglianza:

$$2k - 1 < 2mf\gamma.$$

I massimi di nettezza, alternati con questi minimi, corrispondono ai valori di φ tali che:

$$\gamma \sin \varphi_{2k-2} = (2k - 2)/2mf \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Abbiamo eseguito vari esperimenti, per controllare la validità di queste formule, osservando con un obbiettivo acromatico, di $f = 28,5$ cm. e $H = 0,7$ cm., due forellini circolari, ciascuno di $0,022$ cm. di diametro e coi centri distanti $0,093$ cm. La distanza tra la sorgente e l'obbiettivo poteva raggiungere 45 m. Il reticolo, di 500 tratti per cm. era girevole nel suo piano, e mediante un indice segnava gli angoli sopra un semicerchio graduato. I forellini erano illuminati con una lampada di Nernst, essendo essenziale una sorgente luminosa costante.

L'accordo colle previsioni è stato completo; la distanza fra i forellini potè esser misurata con un error medio relativo di circa $0,5\%$.

Le prove furono eseguite in luce bianca e in luce monocromatica e i risultati furono dello stesso ordine di precisione; si ottenne invece assai di più quando i forellini erano illuminati con luci di colore molto diverso, come si ottiene proiettandovi sopra uno spettro colla dispersione parallela alla loro congiungente. Ma data la poca importanza di questo caso, non entreremo in ulteriori dettagli.

Quando le stelle artificiali sono monocromatiche, le frangie appaiono in tutte le zone comuni a due onde diffratte consecutive, qualunque sia il loro ordine, finchè l'intensità luminosa permette di percepirle; in generale l'onda diretta e le due diffratte di prim'ordine sono le più intense e quelle prevalentemente osservate. Le frangie sono rettilinee, parallele ed equidistanti solo quando tutto il percorso tra le stelle e la retina dell'osservatore, (o lo schermo) è otticamente perfetto; perciò in pratica subiscono delle deformazioni⁽¹⁾ sia per le eventuali aberrazioni e irregolarità dell'obbiettivo, sia per le alterazioni a cui può andar soggetto il mezzo percorso dai raggi.

Alcuni esperimenti eseguiti collo scopo di valutare l'influenza di questi fattori hanno portato a concludere che le aberrazioni, a meno che non siano enormi, non danno alcuna noia; tanto che si son fatte misure molto precise anche con una lente biconvessa semplice e mal centrata; invece i disturbi dell'aria, che producono un continuo movimento delle frangie, se non danno quasi alcuna noia quando le stelle son ben luminose, impediscono la visione delle frangie quando sono molto deboli; ma altrimenti non alterano la precisione delle misure. Durante le nostre prove i raggi luminosi passavano sopra una stufa elettrica accesa.

Così ben poca influenza ha la distanza y tra il reticolo e il fuoco; bisogna che le frangie siano molto sottili perchè abbiano una sensibilità inferiore, specie nel determinare i minimi di nettezza. Ciò spiega anche perchè le aberrazioni dell'obbiettivo abbiano una influenza sensibile soltanto quando sono molto forti.

Quando le stelle sono bianche, le frangie sono alquanto colorate agli orli, nonostante che^o la loro larghezza sia indipendente da λ ; e ciò sia per

(1) V. RONCHI, « Nuovo Cimento », nuova serie, III, 1924.

l'aberrazione cromatica dell'obbiettivo, sia perchè i singoli sistemi monocromatici di frangie pur avendo la stessa frequenza sono leggermente spostati uno sull'altro, trasversalmente. Anche con tutto questo, a meno che l'obbiettivo non abbia una aberrazione cromatica enorme, si vedono tutte le frangie dovute alle tre onde centrali, e soltanto quelle dove intervengono le onde diffratte di second'ordine o superiori sono confuse o addirittura invisibili. Però l'esame delle frangie centrali è più che sufficiente per lo scopo; e anzi aggiungiamo che la tenue colorazione agli orli costituisce un ulteriore elemento per giudicare i massimi di nettezza, perchè la figura complessiva deve mostrare una completa simmetria, quando l'obbiettivo è ben centrato, elemento che non si ha in luce monocromatica. Ciò spiega anche perchè le misure riescano assai più precise se le stelle hanno diversa colorazione.

Lo scopo di queste prove era di studiare la convenienza dell'applicazione di questo dispositivo alla misura dei diametri stellari e delle stelle doppie nel campo astronomico.

Il limite superiore di sensibilità è quello stesso dell'interferometro che applicato da A. A. Michelson ⁽¹⁾ fin dal 1890 a questo genere di misure ha preso ora notevole sviluppo ⁽²⁾; però i reticoli dovrebbero esser più vantaggiosi, sia perchè non si limita affatto l'ingresso della luce nell'obbiettivo, sia perchè si sopprime l'oculare; ma soprattutto perchè le frangie coi reticoli sono indipendenti da λ ; e così non solo viene evitato il calcolo della *lunghezza di onda effettiva*, con tutte le incertezze inerenti, ma vengono evitati anche per la maggior parte, se non tutti, i disturbi dovuti alla dispersione atmosferica.

Prove di confronto eseguite in Laboratorio con un interferometro del tipo di Michelson (fessure davanti all'obbiettivo) e con un reticolo equivalente, a parità completa di tutte le altre condizioni, sono state nettamente favorevoli per il secondo; con questo, fra l'altro erano possibili le misure anche quando un prisma sottile era posto davanti all'obbiettivo, mentre coll'interferometro non si percepivano più frangie. Però un confronto esauriente può farsi solo sul cielo, da chi posseggia gli strumenti adatti nell'uno e nell'altro campo.

Ora sono in corso misure di stelle doppie coll'equatoriale di Amici (28 cm.) dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, per provare quale precisione si può raggiungere sul cielo, mediante i reticoli.

(1) A. A. MICHELSON, «Phil. Mag.», XXX, p. 1, 1890. «Astr. phys. Jour.», LIII, p. 249, 1921.

(2) J. A. ANDERSON, «Astr. phys. Jour.», LI, p. 263, 1920.

Chimica-fisica. — *I reticoli cristallini dei fluoruri di litio e magnesio e il loro isomorfismo.* Nota di A. FERRARI ⁽¹⁾ presentata dal Socio G. BRUNI ⁽²⁾.

L'isomorfismo ⁽³⁾ tra fluoruro di litio e fluoruro di magnesio è stato dimostrato con l'analisi termica da G. Tacchini ⁽⁴⁾ e con l'esame röntgenografico da G. Bruni e G. R. Levi ⁽⁵⁾.

Questo isomorfismo tra composti di elementi a valenza diversa non si spiega facilmente mediante le attuali concezioni sui reticoli cristallini. Per la sua interpretazione è in primo luogo necessario conoscere la disposizione degli atomi nel reticolo dei due composti in esame.

Del sistema $\text{LiF} - \text{MgF}_2$ il primo sale è stato studiato da parecchi autori ⁽⁶⁾ con risultati perfettamente concordanti, fu anzi la prima sostanza esaminata da Debye e Scherrer ⁽⁷⁾ col metodo che da loro prende il nome: è stato trovato un reticolo a facce centrate tipo cloruro di sodio.

Per fluoruro di magnesio noto dalla cristallografia ⁽⁸⁾ come tetragonale con rapporto assiale $c/a = 0,6596$ non si hanno risultati di studi coi raggi X da parte di precedenti autori.

M. L. Huggins ⁽⁹⁾ attribuisce ad una serie di sostanze SnO_2 , PbO_2 , MnO_2 , RuO_2 , ZrSiO_4 , YPO_4 , e MgF_2 tutte tetragonali con rapporto assiale, assai vicino a quello del MgF_2 una struttura del tipo di quella data da Vegard ⁽¹⁰⁾ e Williams ⁽¹¹⁾ per il rutilo; non riporta però dati sperimentali, nè le ragioni di tale asserzione. Nel presente lavoro riferisco appunto sulla struttura cristallina del fluoruro di magnesio esaminata col metodo delle polveri ed aggiungo il calcolo delle intensità del fluoruro di litio.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(3) L'espressione « isomorfismo » è usata qui per brevità nel suo senso più lato, senza voler entrare in discussione sulla sua portata.

(4) « Gazz. Chim. It. », 54, II, 1924.

(5) « Rendiconti Lincei », vol. XXXIII, (2° sem.), (1924), 397.

(6) HULL. A. W., « Proc. Am. Inst. Elec. Engin. », 38, 1171.

DAVEY. W. P., « Phys. Rew. », 21, (1923), 143.

OTT. H., « Physik. Zeit. », 24, (1923), 209.

(7) DEBYE P. e SCHERRER P., « Physik. Zeit. », 17, (1916), 277; 19, (1918), 474.

(8) « Groth. Chem. Krystall. », I, p. 205.

(9) « Phys. Rew. », 21, (1923), 719.

(10) « Phil. Mag. », 32, (1916), 65.

(11) « Proc. Roy. A. », 93, (1917), 418.

Per il calcolo delle intensità, sia del fluoruro di litio che di quello di magnesio ho impiegato due formule diverse:

$$(1) \quad J = \frac{1 + \cos^2 \delta}{2} S^2 \frac{N}{Q \cdot \cos \frac{\delta}{2}}$$

$$(2) \quad J = \frac{1 + |\cos \delta|}{2} \cdot |S| \cdot \frac{N}{Q \cdot \cos \frac{\delta}{2}}$$

dove δ è il solito angolo di riflessione, N è il numero dei piani cooperanti alla riflessione, $Q = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$, S è il così detto « fattore di struttura » dato da

$$(3) \quad S = \sum_k^n A_k e^{2\pi i (\alpha_k h_1 + \beta_k h_2 + \gamma_k h_3)}$$

dove in quest'ultima espressione h_1, h_2, h_3 hanno come nella precedente il solito significato, A_k è una costante dipendente dalla natura dell'atomo disperdente ⁽¹⁾ $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, sono le coordinate degli n atomi costituenti l'elemento di base.

Delle due formole la prima è data da Debye e Scherrer ⁽²⁾ mentre la seconda si ricava dalla prima ponendo l'intensità proporzionale al fattore di struttura e non al suo quadrato, come è stato proposto da Ewald ⁽³⁾. Il confronto delle intensità osservate, con quelle calcolate mediante le due formole non dà tuttavia nel caso di LiCl e MgF₂ una conferma sicura all'una piuttosto che all'altra formula.

FLUORURO DI LITIO. — Per i valori sperimentali riferentisi al fotogramma della detta sostanza rimando al sopracitato lavoro di Bruni e Levi.

Nel sottostante specchietto riporto per le linee dovute a radiazioni K α le intensità osservate e quelle calcolate con le due formole.

I valori riportati nelle due ultime colonne sono dati sia in questa tabella sia in quella del MgF₂ trasformandoli in modo da rendere confrontabili tra loro i valori riferentisi alle linee più forti.

(1) Se allo stato solido la sostanza si può ritenere costituita di atomi, neutri, detta costante va posta eguale al numero atomico, nel caso invece che si abbia una sostanza, come è nel mio caso e come hanno dimostrato Debye e Scherrer proprio per LiF, costituita anche allo stato solido da ioni si deve detto numero aumentare, nel caso di ioni negativi, diminuire nel caso di positivi di tanta unità quante sono le cariche. « Atombau. Physik. Zeit. », 19, (1918), 474.

(2) Loc. cit.

(3) « Physik. Zeit. », 26, (1925), 29.

h_1	h_2	h_3	Intensità		h_1	h_2	h_3	Intensità			
			osservate	calcolate colla				osservate	calcolate colla		
				formola (1)					formola (2)	formola (1)	formola (2)
111	ff		232	322	400	md		68	85		
200	ff		279	266	331	md		130	200		
220	f		241	242	420	f		320	324		
311	m		150	216	422	f		444	435		
222	m		103	95							

L'accordo fra le intensità osservate e quelle calcolate è abbastanza buono specialmente per i valori della terza colonna ottenuti applicando la formola (1).

Dai valori riportati nel citato lavoro di Bruni e Levi si ricavava per la costante reticolare a il valore $4,033 \text{ \AA}$, da cui il volume della cella elementare di base è $V = 65,55 \text{ \AA}^3$, e la densità

$$d = \frac{4 \cdot 25,94 \cdot 1 \cdot 66 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}}{65,55 \cdot 10^{-24} \text{ cm.}} = 2,627.$$

FLUORURO DI MAGNESIO. — I valori sperimentali della tabella allegata differiscono leggermente da quelli riportati da Bruni e Levi avendo preferito misurare un fotogramma, che pur essendo meno intenso come impressione di quello riportato nella tavola allegata al lavoro su accennato, presenta rispetto a quello il vantaggio di avere linee più nette e più sottili che meglio si prestano al calcolo delle costanti reticolari.

L'interpretazione del fotogramma del MgF_2 data da Bruni e Levi non conduceva ad una densità, in accordo colle misure sperimentali, come era fatto osservare nella detta nota. Ciò si doveva all'aver attribuito al fluoruro di magnesio una struttura abbastanza simile a quello di litio, mentre come viene dimostrato più sotto detta sostanza ha una struttura tipo « rutile ».

L'ordinamento delle linee della seguente tabella fatto assumendo il rapporto assiale della cristallografia $c/a = 0,6596$ è perfettamente soddisfacente. La costante a è calcolata colla formola

$$a = d \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \frac{a^2}{c^2} h_3^2}.$$

TABELLA II.

N. d'ordine	$\delta/2$ corretto (1)	$h_1 h_2$ h_3	a	Intensità			N. d'ordine	$\delta/2$ corretto	$h_1 h_2$ h_3	a	Intensità		
				osservate	calcolate colla						osservate	calcolate colla	
					for- mula (1)	for- mula (2)						for- mula (1)	for- mula (2)
1	13.85	110	4.558	f	118	148	18	47.83	420	4.641	md	11	20
2	18.16	101	4.587	md	4	29	19	52.12	113	4.645	d	36	37
3	19.66	200	4.580	md	7	26	20	56.29	402	4.648	md	17	27
4	20.38	111	4.587	ff	205	177	21	57.24	213	4.647	m	66	77
5	21.98	120	4.598	m	84	112	22	58.00	412	4.650	m	80	91
6	24.90	201	4.591	d	0,1	4			332	4.630			
7	26.80	121	4.610	ff	185	180	23	60.32	501	4.640	ff	143	176
8	28.01	220	4.640	mf	64	47			431	4.640			
9	31.22	002	4.642	f	55	34			223	4.640			
10	31.73	310	4.640	d	3	14	24	62.82	520	4.660	dd	28	13
11	33.75	301	4.660	ff	225	145	25	63.93	422	4.640	md	28	51
		112	4.642				26	64.94	303	4.640	m	95	72
12	35.60	311	4.640	d	22	50	27	66.95	313	4.640	dd	28	57
13	36.70	320	4.641	dd	28	38	28	68.45	251	4.640	ff	245	174
14	41.59	400	4.640	d	9	14	29	70.16	440	4.643	d	14	19
15	43.41	410	4.625	mf	56	45	30	74.82	323	4.632	dd	22	46
		222	4.647										
16	44.72	330	4.645	md	41	25	31	76.58	441	4.645	m	194	189
		312	4.637										
17	46.72	411	4.645	mf	25	50	32	80.49	600	4.680	mf	134	91

In questa tabella non riporto le linee dovute a radiazioni $K\beta$; che si presentano sotto i seguenti angoli $\frac{\delta}{2}$ corretti: 12.54 (110); 24.20 (121); 38.58 (410.222); 49.55 (213); 51.46 (322.421); 54.17 (422); 54.77 (303).

(1) Il concetto informatore della correzione è quello di ritenere che la riflessione avvenga sola alla superficie del preparato, ipotesi non completamente rigorosa in questo caso. Basandosi su questo presupposto Pauli ricava (« Zeitsch. f. Krystall. », vol. 56, p. 604), la seguente espressione analitica $\delta' = \delta - \frac{r}{2} (1 + \cos \delta)$ nella quale δ è l'angolo misurato e δ' quello corretto mentre r è il raggio del cilindretto impiegato come preparato.

I valori delle costanti reticolari che si calcolano scartando le prime linee per le quali la correzione è evidentemente insufficiente sono $a = 4,64 \text{ \AA}$ e $c = 3,06 \text{ \AA}$ da cui il volume della cella è $V = 65,85 \text{ \AA}^3$ e la densità

$$d = \frac{2 \cdot 62,32 \cdot 1 \cdot 66 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}}{65,85 \cdot 10^{-24} \text{ cm.}} = 3,14.$$

I valori sperimentali della densità sono molto discordanti: sul prodotto artificiale si ha: $d = 2,857$ (Cossa) sul prodotto minerale Sellaite: $d = 2,972$ (Strüver) e $d = 3,153$ (Sella)⁽¹⁾.

La densità calcolata è in accordo col valore ottenuto da Sella e con una determinazione eseguita sul prodotto fuso usato per le dette ricerche dalla quale risultò $d = 3,148$.

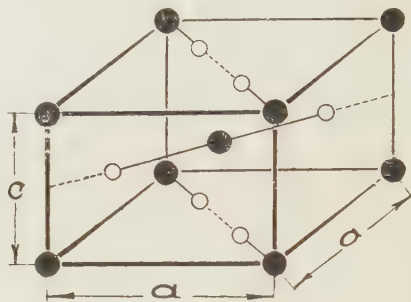


Fig. 1.

La struttura del fluoruro di magnesio è riprodotta nella fig. 1, dove i dischi neri rappresentano gli atomi di magnesio, quelli bianchi gli atomi di fluoro.

Dal seguente specchietto risulta come fosse prevedibile una struttura analoga a quella del rutilo, e della cassiterite.

Infatti i diametri atomici dei componenti dati da Bragg⁽²⁾ e di conseguenza i loro ioni sono assai vicini, come anche i loro rapporti assiali noti dalla cristallografia:

	a	c	c/a	diametro atomico metallo	diametro atomico metalloide
Ti O ₂	4,52	2,92	0,645	2,80	1,30
Sn O ₂	4,67	3,19	0,673	2,80	1,30
Mg F ₂	4,64	3,06	0,660	2,85	1,35

(1) « Groth. », loc. cit.

(2) Ricordo che $A_{Mg} = 10$ essendo il numero atomico diminuito delle due cariche positive e $A_F = 10$ essendo il suo numero atomico aumentato di una carica.

Da questo prospetto appare evidente l'influenza del diametro atomico dei componenti sulla forma cristallina e come possono essere isomorfe anche sostanze chimicamente assai diverse.

Questa analogia di struttura mi ha fatto assumere per il fluoro il medesimo parametro dell'ossigeno nei due suddetti composti ossia $x = 0,31$, questo infatti conduce a intensità più in accordo con le osservate che $0,30$ e $0,32$.

Le coordinate degli atomi nella cella elementare rappresentata nella fig. 1 sono:

$$\text{Mg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{F} \begin{pmatrix} x & -x & 0 & -x & x & 0 \\ \frac{1}{2} + X & \frac{1}{2} & X & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nella fig. 2 sono rappresentate la natura e l'ordine con cui si susseguono i piani paralleli alle cinque faccie principali 110; 101; 200; 111; 002 che si presentano nel fotogramma.

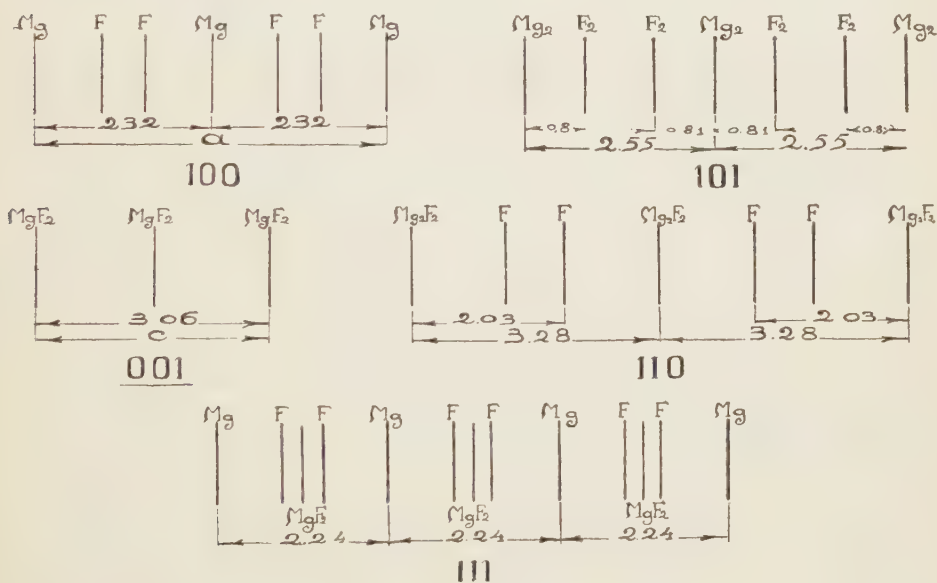


Fig. 2.

Da ognuno di queste serie di piani sono rinviate delle onde che si possono rappresentare con vettori la cui ampiezza è proporzionale al numero e alla natura degli atomi che occupano detti piani.

Tali onde si trovano sfasate fra loro di una frazione di 360° data dal rapporto fra la distanza che separa il piano considerato da uno dei piani preso come origine e la distanza reticolare $d_{h_1 h_2 h_3}$.

Nella fig. 3 sono rappresentati i vettori dovuti ai piani 110; 101; 200; 111; 002.

Dalla loro composizione risulta l'ampiezza del vettore risultante che non è altro che il fattore di struttura espresso analiticamente colla formola (3).

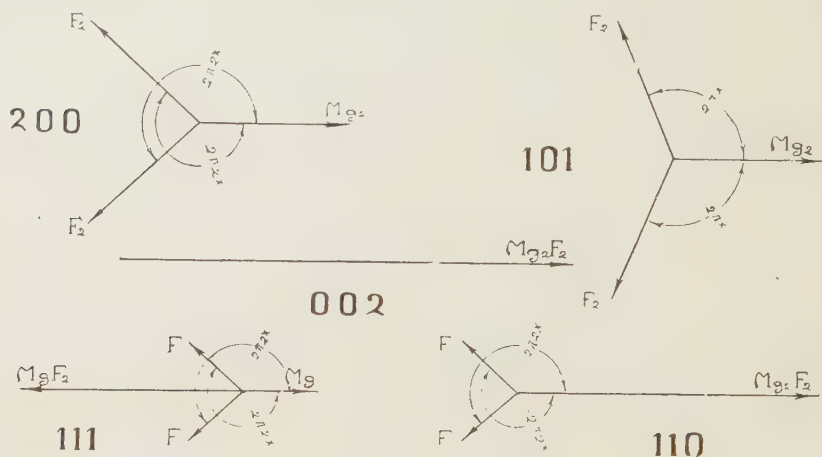


Fig. 3.

Dette risultanti sono (1):

$$\begin{aligned}
 S_{100} &= A_{Mg_2 F_2} - 2 A_F \cos 43^\circ = 25.38 & S_{101} &= A_{Mg_2} - 2 A_{F_2} \cos 68^\circ 30' = 5.34 \\
 S_{200} &= 2 A_{Mg} - 4 A_F \cos 43^\circ = -9.25 & S_{111} &= A_{Mg} - 2 A_F \cos 43^\circ - A_{Mg F_2} = -34.62 \\
 S_{002} &= 2 A_{Mg F_2} = 60
 \end{aligned}$$

da esse applicando la (2) si calcolano le intensità:

$$\begin{aligned}
 I_{110} &= 147 \text{ f} & I_{101} &= 29 \text{ md} \\
 I_{200} &= 26 \text{ md} & I_{111} &= 177 \text{ ff} \\
 I_{002} &= 34 \text{ f}
 \end{aligned}$$

L'accordo di queste intensità calcolate colla formola (2) colle osservate scritte a fianco era già sufficiente per confermare la detta struttura. Ho però eseguito detto confronto per tutte le linee dovute a radiazioni $K\alpha$ come risulta dalle ultime tre colonne della tabella II: i valori calcolati sono per quasi tutte le linee in ottimo accordo con quelli osservati. Per le linee n. 13, 24, 27, 30 tale accordo è meno buono pur non dando luogo a risultati contraddittorî.

Anche dopo stabilita la struttura del fluoruro di magnesio risulta ancora oscuro il modo col quale avviene la sostituzione dei due atomi di litio con uno di magnesio.

Un fatto di grande importanza, che potrà servire alla completa interpretazione del fenomeno di isomorfismo tra questi sali di elementi a valenza diversa, è l'eguaglianza del volume della cella elementare del fluoruro di litio contenente quattro molecole ($V = 65,55$) con quella del fluoruro di magnesio che ne contiene due ($V = 65,85$).

Per lo studio di detti fenomeni sarebbe stato utile ottenere miscele assai più ricche di MgF_2 ; ma questo non si è potuto fare, perchè con un contenuto superiore al 30 % di MgF_2 anche i cristalli temprati si scompungono.

Il sistema $LiCl - MgCl_2$ che dimostra all'analisi termica una serie continua di cristalli misti si presenta più adatto ad un completo esame röntgenografico; ho in corso le ricerche su di esso, ma la grande deliquescenza di questi sali le rende particolarmente delicate.

Riassumendo:

a) È dimostrata per il fluoruro di magnesio una struttura tipo rutilo con le seguenti dimensioni della cella elementare contenente due molecole di MgF_2 : $a = 4,64 \text{ \AA}$ $c = 3,06 \text{ \AA}$ $c/a = 0,6596$.

La densità dedotta è 3,14.

b) Il volume delle celle elementari contenenti quattro molecole nel caso del fluoruro di litio, due in quelle di magnesio, sono praticamente eguali.

Chimica. — *Contributo allo studio di alcuni minerali contenenti tallio. Analisi termica dei sistemi: $Tl_2S - As_2S_3$; $Tl_2S - PbS$ ⁽¹⁾. Nota di G. CANNERI e L. FERNANDES presentata dal Corrisp. G. PELLIZZARI ⁽²⁾.*

È noto che la fonte principale da cui proviene il tallio del commercio è dovuta ai residui della lavorazione di numerosi minerali solforati. Le piriti e le marcassiti ne contengono spesso fino all'uno per cento. Anche le calcopiriti contengono quasi sempre tallio e le blende e le galene. Inoltre assieme al piombo ed al rame il tallio entra nella costituzione di numerosi solfosali dell'arsenico e dell'antimonio.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica inorganica e chimica fisica della R. Università di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

Brunn ⁽¹⁾ lo ha riscontrato nei cristalli di Sartorite $Pb(As_2)S_2$, di Dufrenoy'site $Pb_2As_2S_5$ e di Jordanite $Pb_4As_2S_7$.

Dei minerali di tallio, propriamente detti, sono noti la Lorandite, meta-solfoarsenito, che Krenner ⁽²⁾ rinvenne, sotto forma di cristalli monoclini rossi, nel Realgar di Allchar in Macedonia, e un altro minerale che Jezek ⁽³⁾ trovò in un miscuglio di Realgar e Orpimento. Questo minerale, di color grigionerastro, che si presenta in piccoli cristalli rombici bipiramidali lucenti, fu chiamato Vrbait. Le analisi fatte da Krelik condussero alla formula $TlAs_2SbS_5$, secondo la quale il Vrbait sarebbe un derivato dell'acido HAs_2S_5 , in cui un atomo di arsenico è sostituito con un atomo di antimonio.

Wernadski ⁽⁴⁾ spiega la notevole diffusione del tallio in natura col fatto che i minerali che lo contengono sono, quasi tutti, di carattere secondario.

Secondo l'Autore, esso vi sarebbe contenuto allo stato di miscela isomorfa. Nel caso dei silicati alluminiferi del tipo della mica, il tallio fungerebbe da vicariante dei metalli alcalini e nei numerosi solfosali sostituirebbe il piombo, il rame, l'argento. Che il tallio possa funzionare da vicariante dei metalli alcalini è fuori dubbio, data la analogia stretta verso questi elementi che si manifesta in moltissimi casi di isomorfismo. Non è però altrettanto ovvio che esso sostituisca il piombo o l'argento nei loro minerali. Nè si può, *a priori*, stabilire quale sia la forma di combinazione del tallio in relazione di isomorfismo con quella posseduta dal piombo o dall'argento nei loro minerali.

Se si tratta con idrogeno solforato una soluzione acida in cui sia contenuto oltre al tallio del rame, piombo, arsenico, antimonio, stagno, precipita anche il tallio in quantità notevole. Se i tre ultimi elementi sono presenti in eccesso la precipitazione del tallio è quantitativa. Secondo Gunning ⁽⁵⁾ da miscugli di arseniti e sali tallosi l'idrogeno solforato precipita il composto $TlAsS_2$. Nawley ⁽⁶⁾ non ha potuto confermare i risultati di Gunning e afferma che dalle soluzioni contenenti sino a sessantadue molecole % di As_2S_3 si separano cristalli misti di colore variabile dal giallo al rosso. Da 62 molecole % As_2S_3 sino a Tl_2S si forma sempre una seconda fase che è il solfuro di tallio nero.

Da quanto abbiamo esposto non risulta chiaro come il tallio si trovi nei minerali solforati dell'arsenico. Sembra tuttavia probabile che le relazioni di isomorfismo che determinano la miscibilità siano dovute piuttosto ai solfosali. Per stabilire quindi quali siano i solfosali che prendono origine tra il solfuro di arsenico e il solfuro di tallio abbiamo eseguita l'analisi termica del sistema.

(1) «Bull. Soc. Franc. Min.», 40, 110-111, 1917.

(2) «J. Chem. Soc. A.», II, 30, 1896.

(3) «Chem. Zentr.», I, 189, 1913.

(4) Loc. cit., II, 1689, 1909.

(5) «Chem. News.», 17, 138.

(6) «J. Am. Chem. Soc.», 29, 1011 e 1019.

Lo stesso interesse presenta il problema del contenuto del tallio nei solfuri metallici. Huber⁽¹⁾ ha trovato che il solfuro di tallio dà col sale d'argento il composto definito: $4 \text{ AgS} \cdot \text{Tl}_2\text{S}$ che si decompone alla fusione. Dal diagramma di stato non si rileva miscibilità allo stato solido tra i due solfuri, ciò che farebbe escludere che il tallio si trovi nei minerali di argento allo stato di miscela isomorfa. Che il tallio non si mescoli come solfuro col solfuro di argento, è anche confermato dal fatto, da noi accertato, che precipitando quest'ultimo dalle soluzioni acide in presenza di tallio non ne trascina la benchè minima traccia.

In considerazione delle analogie tra tallio, argento e piombo, ci è parso degno di interesse lo studio del comportamento del solfuro di tallio di fronte al solfuro di piombo, sia per precipitazione delle soluzioni dei loro sali, sia allo stato fuso.

L'analisi termica dei due sistemi è stata eseguita adoperando un fornello elettrico a resistenza regolabile in modo da ottenere una velocità di raffreddamento sufficientemente lenta. Nel caso del sistema $\text{Tl}_2\text{S} - \text{As}_2\text{S}_3$ fu possibile adoperare un termometro a mercurio riempito di azoto. Nel caso del sistema $\text{Tl}_2\text{S} - \text{PbS}$ fu necessario ricorrere ad una coppia termoelettrica Pt — Pt Rh. Nel primo caso, essendo i pesi molecolari e specifici dei due componenti molto diversi tra loro, abbiamo preferito mantenere costante il numero degli equivalenti molecolari totali piuttosto che il peso delle miscele. Nel secondo caso, invece, abbiamo ritenuto più comodo mantenere costante il peso delle miscele.

Tl_2S e As_2S_3 (figura 1) formano 4 composti definiti, corrispondenti alle formule: Tl_3AsS_3 , $\text{Tl}_4\text{As}_2\text{S}_5$, $\text{Tl}_6\text{As}_4\text{S}_9$, TlAsS_2 i quali rispettivamente fondono a 295° , 278° , 317° , 300° .

L'ortosolfoarsenito, Tl_3AsS_3 , ed il pirosolfoarsenito, $\text{Tl}_4\text{As}_2\text{S}_5$, che compaiono nel diagramma come due punti di transizione, si decompongono alla fusione. La curva di separazione del solfuro di tallio porta ad escludere che esso sia capace di sciogliere del solfuro di arsenico allo stato solido. Oltre la concentrazione di 20 % molecole Tl_2S intervengono tali difficoltà sperimentali che non permettono di trarre alcun indizio sicuro dei fenomeni che hanno luogo nella massa al raffreddamento. Il trisolfuro di arsenico in eccesso sublima sulle pareti del crogiuolo, fonde in un liquido vischioso non aderente alle pareti del termometro. Non si può, perciò, escludere che, secondo quanto è stato trovato per via liquida da Hawley, i due solfuri si mescolino tra di loro allo stato solido. Il colore variabile delle masse fuse dal giallo al rosso, fino alla concentrazione corrispondente a TlAsS_2 fa supporre che a questo tratto del diagramma corrisponda una continua serie di cristalli misti.

(1) «Z. anorg. allgem. Chem.», 116-139, 1921.

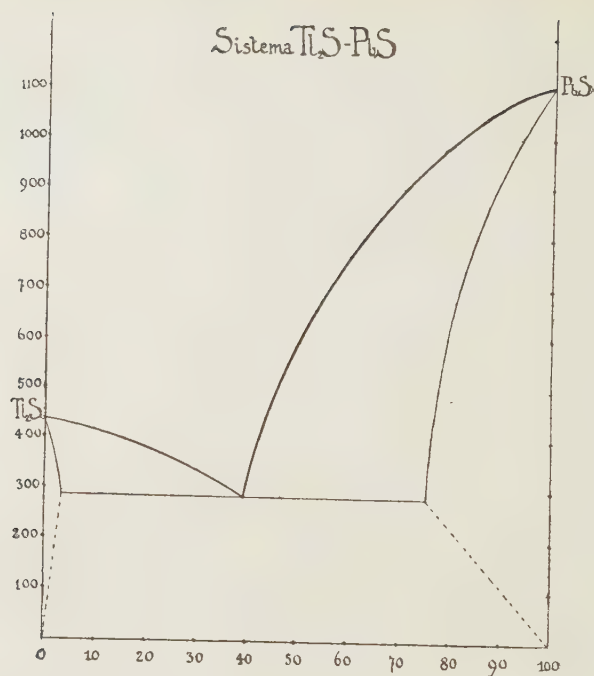


Fig. 1.

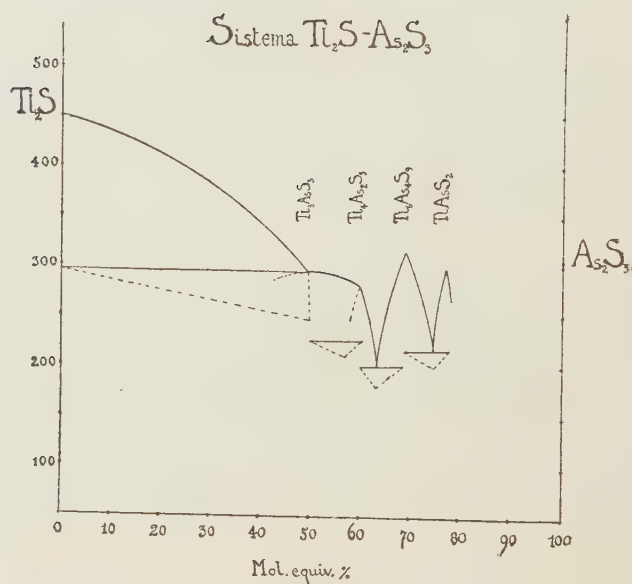


Fig. 2.

I valori riportati nella seguente tabella, forniti dalle curve di raffreddamento dei miscugli, permettono di costruire il diagramma del sistema: $Tl_2S - As_2S_3$.

Molecole equivalenti % Tl_2S	Temperature di inizio di cristallizzazione	Temperature di fine di cristallizzazione
0	448°,5	—
10	427°	295°
20	418°	295°
30	376°,5	295°
40	341°	295°
50	—	295°
55	291°	295°
60	278°	—
63	—	200°
65	251°	200°
67,5	317°	—
70	303°,5	215°
72	—	215°
75	300°	—
77	269°,5	—

Diagramma Fig. 1.

Dal diagramma di fusione $Tl_2S - PbS$ (figura 2) si rileva che i due solfuri sono completamente miscibili allo stato liquido e solo parzialmente allo stato solido. L'ampia lacuna di miscibilità è compresa tra le concentrazioni: 97 % Tl_2S e 25 % PbS . La miscibilità del solfuro di tallio nel solfuro di piombo, sebbene in misura più limitata, ha luogo anche a temperatura ordinaria. Da soluzioni contenenti una quantità costante di nitrato di piombo e quantità sempre crescenti di nitrato di tallio in volumi uguali di liquido debolmente acido per acido nitrico, veniva precipitato il solfuro di piombo. Nelle numerose esperienze eseguite a questo riguardo è stata sempre riscontrata la presenza del tallio nel solfuro di piombo. Il contenuto in Tl_2S cresce in modo continuo al crescere della concentrazione del nitrato nella soluzione avvicinandosi ad un limite massimo che si aggira intorno al 4 %.

I valori riportati nella seguente tabella permettono di costruire il diagramma di stato del sistema: $Tl_2S - PbS$.

Concentrazione % Tl_2S	Temperature di inizio di cristallizzazione	Temperature di fine di cristallizzazione
100	448°,5	—
98	440°	—
90	417°	282°
80	381°	282°
70	340°	282°
60	—	282°
55	463°	282°
40	591°	282°
30	894°	282°
20	981°	—
10	1058°	—
0	1108°	—

Diagramma Fig. 2.

I risultati ottenuti permettono di concludere che il tallio sia contenuto nei minerali solforati dell'arsenico sotto forma di solfosale probabilmente allo stato di soluzione solida con i solfosali analoghi del piombo. Questa ipotesi è anche confortata dai risultati dell'analisi termica del sistema $Tl_2S - PbS$. Se infatti esiste miscibilità tra i due solfuri è molto probabile che la miscibilità abbia luogo tra i solfosali corrispondenti, dove l'influenza della massa è anche maggiore.

Nella galena, con molta probabilità, il tallio è contenuto come solfuro anche in questo caso allo stato di miscela isomorfa col solfuro di piombo.

Chimica — *Complessi del Molibdeno pentavalente* ⁽¹⁾. Nota di G. SCAGLIARINI ⁽²⁾ presentata dal Corrisp. GIOVANNI BOERIS.

Da alcuni anni con G. Tartarini ⁽³⁾ ho intrapreso lo studio dei prodotti di demolizione di complessi dei metalli trivalenti. Di tali complessi quelli del Molibdeno coll'acido solfocianico sono assai resistenti, tanto che non si riesce a demolirli che in piccola parte intervenendo con agenti idrolizzanti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

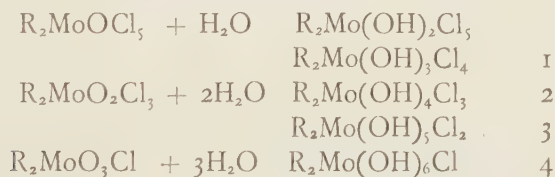
(2) Presentata nella seduta del 17 maggio 1925.

(3) «Gazz. Chim. Ital.» 53, p. 139, p. 617, p. 876 (1923).

molto energici e a caldo. I complessi del Molibdeno nella forma pentavalente sono invece più deboli giacchè in soluzione acquosa vengono scomposti idroliticamente, cosicchè presentano reazione acida e spesso non si possono ottenere per successive cristallizzazioni i sali primitivi. La scomposizione si manifesta spesso col cambiamento di colore, quando la concentrazione dell'acido libero non è più sufficiente per impedire la decomposizione idrolitica.

Il Barbieri ⁽¹⁾ a questo proposito, studiando i complessi del Molibdeno pentavalente coll'acido solfofanico, mise in evidenza che la reazione di Braun dipendeva da successive idrolisi del complesso del Molibdeno pentavalente con l'acido solfofanico.

Il sale di Klason ⁽²⁾ $(\text{NH}_4)_2\text{MoOCl}_5$, già studiato dal Mauro e Danesi ⁽³⁾ e da Friedheim e Euler ⁽⁴⁾ è di un bel colore verde smeraldo finchè si conservi allo stato secco, ma se si tratta anche con piccola quantità d'acqua la colorazione verde scompare e si possono ottenere, a diluizioni variabili, delle soluzioni che dal bruno-scuvo passano al rosso-mattone, al rosso-chiaro, al giallo-aranciato fino ad arrivare per diluizione ulteriore a soluzioni decisamente gialle. Questo fatto, dato che non ci può essere cambiamento di valenza del Molibdeno, indubbiamente deve stare in rapporto con un fenomeno di idrolisi successiva. Però i prodotti sono troppo solubili per poter essere ottenuti allo stato cristallino. L'idrolisi poteva avvenire in due modi diversi: e cioè il sale poteva comportarsi o come sale doppio o come sale complesso. Che si trattasse di un sale doppio poteva dubitarsi, perchè il Nordenskjöld ⁽⁵⁾ dalle soluzioni del sale di Klason con cloridrati di varie amine ottenne dei composti della formula generale: $\text{MoOCl} \cdot 2\text{R}_2\text{NH}_2\text{Cl}$, ecc. Ma poteva anche trattarsi di un sale complesso che si scindesse idroliticamente e gradualmente secondo lo schema seguente:



Questo modo di comportarsi troverebbe riscontro nel comportamento dei complessi studiati da G. A. Barbieri e sopra ricordati.

Ora gli sperimenti hanno fatto conoscere che il sale di Klason partecipa e del sale doppio e del sale complesso, si ha cioè un equilibrio fra i

(1) « Atti Acc. Lincei » 28, I, p. 351 (1919).

(2) « Ber. » 34, p. 148 (1901).

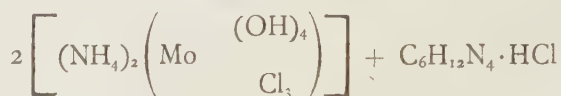
(3) « Z. Anal. Chem. » 120, p. 507.

(4) « Ber. » 28, p. 2061.

(5) « Ber. » 34, p. 1574 1901.

due diversi schemi di scissione. Difatti intervenendo opportunamente con piridina, dalle soluzioni del sale di Klason ho potuto ottenere un composto corrispondente alla forma $\text{MoOCl}_3 \cdot \text{C}_5\text{H}_5\text{N}$ in cui il sale verde di Klason si scinderebbe, dando luogo in pari tempo a cloruro ammonico, mentre il cloruro di molibdenile resta fissato dalla piridina.

Nelle stesse soluzioni intervenendo invece con cloridrato di esametilentetramina potei ottenere il prodotto corrispondente all'altro modo di scissione e precisamente:



Questo sale però può essere anche rappresentato colla formula:



simile a quella del sale ottenuto con acido ossalico da G. A. Barbieri⁽¹⁾ a cui l'autore attribuisce la formula:



Seguendo la denominazione di G. A. Barbieri, il mio sale sarebbe perciò cloruro doppio di molibdile e ammonio fissato dal cloridrato di urotropina.

PARTE SPERIMENTALE

CLORURO DI MOLIBDENILE E PIRIDINA



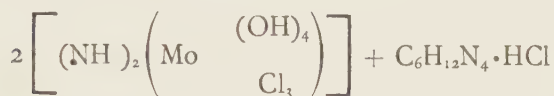
A una soluzione satura a freddo di sale di Klason venne aggiunto a goccia a goccia un eccesso di soluzione di acetato di piridina leggermente acida per acido acetico. Dopo due giorni di riposo cominciarono a depositarsi lungo le pareti del recipiente piccolissimi cristalli di colore rosso-mattone; il precipitato filtrato alla pompa spremuto e lavato venne seccato fra carta da filtro. Non si prestava a essere ulteriormente cristallizzato. In esso si determinò gravimetricamente il Molibdeno come anidride molibdica dopo avere ossidato il Molibdeno pentavalente con acqua ossigenata e precipitato poscia come solfuro. Nel filtrato si dosò il cloro volumetricamente col metodo di Vohlard dopo aver scacciato con corrente di aria l'idrogeno solfo-

(1) « Atti Acc. Lincei » 25, I, p. 775 (1916).

rato. L'azoto venne determinato col metodo Schulze ed anche con quello di Dumas.

Trovato	% Mo 32,08	;	Cl 35,03	;	N 4,98
Calcolato	% Mo 32,27	;	Cl 35,78	;	N 4,71

CLORURO DOPPIO DI MOLIBDILE E D'AMMONIO E CLORIDRATO
DI ESAMETILENTETRAMINA



Moltissimi furono i tentativi per preparare puro il composto, giacchè assai difficilmente lo si può ottenere allo stato di purezza, poichè l'esametilentetramina in questo caso fissa delle miscele di vari sali basici. Il miglior modo per ottenerlo in uno stato di sufficiente purezza è quello che ora descrivo.

10 gr. di sale di Klason preparato di recente vengono trattati con 50 cc. di alcool e 15 cc. di acqua. Si filtra, al filtrato si aggiunge una soluzione satura in acqua di gr. 5 di esametilentetramina a cui vengono aggiunti 2 cc. di acido cloridrico e 10 gr. di alcool. Si ottiene un precipitato cristallino ed in seguito dei cristalli ben formati rosso-scuri che vanno depositandosi lungo le pareti del recipiente. In alcuni casi, specialmente a temperatura bassa, questi cristalli assumono dimensioni piuttosto notevoli. Filtrati alla pompa e lavati con alcool vennero seccati fra carta da filtro, indi sottoposti all'analisi. Il Molibdeno si dosava ponderalmente col metodo già riferito precedentemente, il cloro col metodo di Vohlard e l'azoto o col metodo di Dumas o con quello di Kjeldhal.

Trovato	% Mo 23,81	;	Cl 30,94	;	N 14,86
Calcolato	% Mo 24,33	;	Cl 31,43	;	N 14,20

Si ottennero inoltre altri prodotti di colore più chiaro che, probabilmente, debbono essere i rappresentanti di una ulteriore scissione idrolitica del composto di Klason, però tutti poco puri poichè formati di varie miscele dei prodotti di idrolisi.

Geologia. — *Sulla costituzione geologica di alcune isole minori del Dodecaneso.* Nota di ARDITO DESIO presentata dal Socio GIOTTO DAINELLI.

Durante la seconda missione da me compiuta nel Dodecaneso nell'estate del 1924, ho avuto occasione di visitare vari isolotti e scogli di quell'arcipelago fino ad oggi completamente ignoti sia dal punto di vista geologico, quanto da quello geografico. A complemento delle notizie sommarie pubblicate lo scorso anno sulla costituzione geologica delle maggiori isole ⁽¹⁾, credo opportuno riferire brevemente anche su quelle esaminate l'estate scorsa.

L'isola di *Gaidaro* (*Gaidaronisi* o *Agathonisi*), ch'è la più settentrionale di quelle da noi occupate trovandosi 30 km. circa a nord di Lero, è costituita in buona parte da calcari stratificati, subcristallini, grigi, completamente privi di tracce organiche. Gli strati hanno una direzione prevalente est-ovest e s'immergono con inclinazioni non molto forti, verso nord. Sul lato meridionale dell'isola affiorano anche delle filladi nelle quali sono immerse delle lenti di calcari saccaroidi bianchi. Il passaggio fra le filladi e i calcari è segnato da una serie non molto potente di calcescisti e di calcari scistoso-micacei brecciati. Le rocce scistoso-cristalline formano una fascia più o meno continua e diretta est-ovest, che passa alle radici della penisola di Stifi, della penisola di Kefala e presso l'estremità di quella di Tholi. Esse costituiscono il nucleo di un'anticlinale, disturbata da numerose faglie e arricciamenti secondari. Un'altra faglia, parallela alla direzione delle pieghe, corre lungo il lato settentrionale dell'isola.

Gli isolotti che circondano Gaidaronisi, e cioè *Psathonisi*, *Strongili*, *Neronisi* e *Kathagani*, sono formati dagli stessi calcari cristallini ricordati avanti, mentre *Kunellonisi* — che vidi però solo da una certa distanza — mi parve formato da rocce scistoso-cristalline. Sull'età di queste rocce, determinabile solo in base ad analogie litologiche con quelle di altre isole vicine e a considerazioni stratigrafiche, non posso dare notizia finchè non sia completamente esaurito lo studio dei materiali paleontologici.

A mezzogiorno di Gaidaronisi e 20 km. all'incirca ad oriente di Lero, si trova un altro isolotto appartato: *Fàrmaco*. Esso è completamente costi-

(1) DESIO A., *Sulla costituzione geologica delle isole di Piscopi, Simi, Lero, Lipso e Patmo (Mare Egeo)*. Nota presentata a questa Accademia nella seduta del 13 aprile 1924. *Cenni preliminari sulla costituzione geologica del Dodecaneso*. « Boll. Soc. Geol. It. », XLIII, (1924), pp. 113-127. *Appunti geologici sull'isola di Cos (Dodecaneso)*. Ibid., XLIII (1924), pp. 151-160.

tuito da un calcare subcristallino grigio, talora anche saccaroide, in strati ben distinti, con numerose e sottili venature calcitiche. È lo stesso calcare che si trova nell'isola di Lero e sui rilievi del Kristòs a Cos, calcare del tutto privo di resti organici, ma probabilmente cretaceo. Gli strati descrivono un'ampia sinclinale con l'asse diretto est-ovest, ossia perpendicolarmente all'asse maggiore dell'isola.

Ancora più a sud e a circa 5 km., verso oriente, da Càlimno, troviamo l'isolotto di *Calolimno*, o *Gaidaronisi*, come viene chiamato sul posto. In esso finalmente compaiono delle rocce non metamorfosate, ossia i calcari ceroidi grigio-nerastri e bianchi del Cretaceo con resti di Rudiste, Nerinee e altri fossili della medesima età. Presso l'estremità orientale, sopra i calcari ceroidi grigi, s'adagiano dei calcari neri minutamente brecciati e dei calcari neri subceroidi con frammenti di fossili difficilmente determinabili, ma con molta probabilità appartenenti anch'essi al Cretaceo. Gli strati hanno una direzione prevalente ONO-ESE; sulla penisola orientale piegano verso ENE. Le due vicine isolette di *Gargari* e di *Pleronisi*, sono pure costituite da calcari ceroidi grigi del Cretaceo.

Sulle isole di *Psèrimo* (*Càppari*) e di *Plati*, che stanno fra Cos e Càlimno, già ho avuto occasione altra volta di accennare. La prima è formata da una anticlinale diretta est-ovest di calcari cretacei sulla cui gamba meridionale s'appoggiano i calcari eocenici con nummuliti. La seconda è invece costituita da un'alternanza di tufi vulcanici e di calcari concrezionari del Pliocene superiore o del Quaternario inferiore.

A mezzogiorno di Càlimno si trovano però ancora due isolotti: quello di *Nerá* e quello di *S. Nicola*. Ambedue sono formati da una zolla di calcari concrezionari color caffè-latte, molto compatti e talora subcristallini. Gli strati appaiono leggermente inclinati verso mezzogiorno e disturbati da piccole ma numerose faglie. Sopra questi depositi giacciono dei crostoni di « poros » e di « panchina » e in qualche punto anche dei materiali vulcanici (tufi) e dei banchi di conglomerato. Tutti questi depositi, che sono dello stesso tipo di quelli di Plati e che trovano molte analogie con i terreni neogenici della vicina Cos, appartengono in parte al Pliocene superiore, in parte al Quaternario.

A oriente di Càlimno e a brevissima distanza dalla costa, trovasi il grosso isolotto di Tèlendo, che visitai un po' di sfuggita. Esso è costituito in gran parte da calcari ceroidi grigi del Cretaceo in grossi banchi diretti NE-SO. Lungo le pendici meridionali affiorano però gli scisti più o meno cristallini, rappresentati da scisti anfibolitici verdi ai quali fanno seguito calcari reticolati neri in straterelli sottili, separati da veli scistososi e infine da un'arenaria rosso-vinata o gialla che segna il passaggio ai calcari cretacei. La particolarità più interessante dell'isola di Tèlendo sta però nella presenza di resti di case, di costruzione relativamente recente (medioevale), sommerse sino a circa 2 metri di profondità.

Qualche cenno occorrerà che aggiunga ora sull'isola di *Calchi*, già ricordata in una mia nota precedente, e sullo stormo d'isolotti e di scogli che la collega a Rodi. Come avevo supposto durante il mio primo viaggio nell'Egeo, essa è costituita completamente da calcari ceroidi prevalentemente bianchi con fossili del Cretaceo, fra cui Rudiste, Nerinee, Idrozoi. Gli strati, non sempre ben distinti, hanno una direzione prevalente est-ovest e sono disturbati da faglie abbastanza numerose ed talora ben evidenti per caratteristici liscioni corrispondenti ai piani di dislocazione. Tipica quella che passa alle radici della penisola di Tracià, sul lato meridionale dell'isola. Nella baia di Pontamòs e in quella di Molos, sopra i calcari giace un ristretto deposito di scisti argilloso-arenacei, tortemente piegati, di un colore verdastro o rosso, privi di fossili, che pare rappresentino il Flysch eocenico, così diffuso nella vicina Rodi. Al di sopra di questi scisti, v'è un crostone di arenaria giallognola, simile alla panchina e poi una alternanza di detriti cementati, misti con terra rossa, e strati di « poros » contenenti piccole pomici. Della stessa natura di Calchi è anche l'isola di *Alimnià* che giace un po' più ad oriente e dista circa 7 km. da Rodi. Essa è nettamente divisa in due parti da una faglia riconoscibile per una grandiosa parete (piano di scorrimento) e per l'abbassamento subito dalla zolla meridionale sulla cui superficie si ritrovano tutte le caratteristiche morfologiche di quella settentrionale, più elevata di oltre un centinaio di metri. Dei 16 isolotti minori che formano l'arcipelago di Alimnià, tutti sono costituiti dai calcari cretacei, tranne quello di *S. Teodoro*, ch'è attraversato da un affioramento di marne senza fossili, probabilmente eoceniche.

Dirigendoci ora verso occidente, troviamo un altro gruppo di isolotti sparsi nell'inquieto mare che separa Scàrpanto da Stampàlia. Di questi non ebbi la possibilità di visitare che una parte; un'altra ne vidi a breve distanza.

L'isolotto più vicino a Scàrpanto, da cui dista però circa 30 km., è quello di *Stakides*. Esso è formato da una zolla di calcari subcristallini, bianco-giallastri o rosei, venati, con scarsi nuclei di selce. Il calcare per lo più è diviso in strati poco potenti e talora assai sottili, diretti prevalentemente est-ovest; altre volte invece assume un aspetto massiccio e compatto. Sul lato orientale affiorano anche degli scisti che però non potei esaminare da vicino, ma che con tutta probabilità rappresentano il Flysch eocenico. Da calcari massicci sono costituiti anche gli isolotti e gli scogli d'intorno. Per quanto non abbia potuto riconoscere in questi calcari alcuna traccia di resti organici, pure per analogia con Rodi e Scàrpanto, ritengo che appartengano al Cretaceo superiore. Fra *Stakides* e *Zafarana*, esistono altri sei isolotti *Kamili*, *Dio Adelfi*, *Afgò*, *Dhisakia* (*Karavi* delle carte) che però vidi solo da lontano e che mi parvero formati in parte da calcari, in parte — almeno i due di *Dhisakia* e quello di *Afgò* — da rocce scistoso-arenacee anch'esse con probabilità rappresentanti del Flysch eocenico. L'isola di *Zafarana* con i due scogli di *Plakides* (*Mikrà Safrana* delle carte) è

costituita da calcari ceroidi, grigio-chiari in strati poco distinti, e diretti prevalentemente OSO-ENE, ma spesso sconvolti e minutamente fratturati. Essi contengono in vari punti e specie, presso l'estremità settentrionale, numerosi fossili caratteristici del Cretaceo, come Rudiste, Nerinee ecc. Sul lato occidentale dell'isola maggiore si notano però, presso il mare, anche dei scisti rossi privi di fossili. Resta ancora da fare un breve cenno all'isola di *Sirna* (*Sirina* delle carte) formata da calcari selciferi grigi, in strati ben distinti e diretti prevalentemente est-ovest, che sono pure da ritenersi cretacei e sul gruppo di *Levita* formato da calcari subcristallini grigi o biancastri, simili ad alcuni tipi di calcari, che ritengo cretacei, di Lero, in strati abbastanza distinti e diretti pure est-ovest⁽¹⁾.

Con il rilevamento delle isole di Cos e di Calchi e con una rapida visita a Stampàlia, Caso, Scàrpanto, note almeno nelle linee generali per studi precedenti, e con l'esame dei vari isolotti cui ora ho accennato, ho potuto completare lo studio geologico di tutto il Dodecaneso su cui, con l'aiuto di specialisti, ai quali è stato affidato l'esame di una parte dei materiali litologici e paleontologici, sto preparando uno studio monografico.

Biologia. — *Razze di bachi da seta a tre e a quattro mute: lo studio degli incroci.* Nota di C. JUCCI presentata dal Corrisp. A. RUSSO.

Quasi tutte le razze di bachi da seta (*Bombyx mori*) compiono la loro vita larvale in cinque età o periodi che vanno il primo dalla nascita alla prima muta, il secondo dalla prima alla seconda muta, il terzo dalla seconda alla terza, il quarto dalla terza alla quarta, il quinto dalla quarta muta alla salita al bosco per l'imbozzolamento.

Ma esistono anche bachi da seta a tre mute o treotti che svolgono il loro ciclo larvale in quattro sole età.

Veramente non di rado anche nelle razze comuni, di quartini, alcuni individui salgono al bosco dopo sole tre mute, ma questi treotti accidentali non trasmettono alla discendenza il loro carattere che sembra quindi affatto occasionale, in rapporto a particolari disposizioni metaboliche individuali stimulate da contingenze di allevamento.

A questo proposito bisogna notare che il numero delle mute che il baco fa nella sua vita larvale, se è suscettibile di diminuzione, è anche passibile di aumento. Speciali condizioni di allevamento, sfavorevoli allo sviluppo, possono determinare nelle comuni razze di quartini la comparsa

(1) Su queste due isole avevo avuto notizia indiretta anche dall'amico Migliorini, che aveva avuto occasione di visitarle di sfuggita nel 1923.

di bachi a 5 mute. Un autore giapponese, Kawase Sojiro, ha ottenuto individui a 5 mute somministrando ai suoi bachi foglie cosparse di ceneri vulcaniche, cercando di riprodurre sperimentalmente le condizioni patogene che avevano determinato, nella regione gelsicola sottoposta alla pioggia di cenere dal vicino vulcano in eruzione, un completo disastro nell'allevamento dei bachi.

Kellog ha visto comparire bachi a 5 mute tra i suoi lotti sottoposti a periodi di inazione; e così il Cavazza, alimentando i suoi bachi con foglia intrisa di agenti chimici vari più o meno tossici.

Ma questi individui a 5 mute, come quelli a tre, non trasmettono il carattere acquisito alla prole.

Pare che in Giappone esistano razze di bachi a 5 mute: il carattere sarebbe certamente ereditario; però si avrebbe sempre dal 10 al 20 % di individui che fanno solo 4 mute. Razze di bachi che fanno regolarmente e costantemente 3 mute esistono in Cina specie in alcune regioni, come lo Chantoung e lo Schensi, ove sono abbondantemente allevati; mentre in Europa, dove godettero un tempo largo favore, specialmente in Italia, sono oggi completamente abbandonati.

Gli è che una lunga esperienza ha dimostrato come, tutto considerato, convenga più l'allevamento dei bachi a 4 mute che di quelli a 3 perchè i vantaggi che questi presentano (minore durata di sviluppo, seta a filo più sottile ed uniforme) sono neutralizzati dal minore rendimento. È chiaro però che se si riuscisse a riunire assieme in una sola razza le qualità buone dei treotti e dei quartini sarebbe l'ideale. Ecco l'interesse pratico di uno studio sul comportamento ereditario del carattere 'numero delle mute' nell'incrocio tra treotti e quartini.

Ma questo studio non è meno importante dal punto di vista teorico. Sul baco da seta finora sono stati condotti studi del comportamento ereditario quasi soltanto di caratteri del bozzolo e delle uova. Si è trovato che questi caratteri, di colore e di forma, obbediscono alle leggi Mendeliane, benchè in parecchi casi compaiano complicazioni difficili a spiegare. Si sono studiati anche caratteri larvali, ma esclusivamente o quasi riguardanti macchie, disegni - mendeleggiano esattamente - gibbosità e simili. Lo studio più interessante, quello dei caratteri fisiologici inerenti allo sviluppo larvale, è tutto da fare. E l'incrocio tra razze a 3 e a 4 mute si presenta come il più adatto a rivelare le leggi del comportamento ereditario di questi caratteri fisiologici.

Nel 1921 e '22 ho studiato la curva di sviluppo dei bachi treotti in paragone a quella delle comuni razze a 4 mute, rilevando profonde divergenze metaboliche. Nel 1923 ho allevato la prima generazione di numerosi incroci tra treotti e razze quartine, ottenendone quasi tutti treotti, meno pochi individui quartini che vennero trascurati: dominanza dunque del carattere del treottismo sia negli incroci a ♀ treotti, sia nei reciproci nei quali

il carattere delle tre mute era portato dal ♂. Questa primavera, 1924, poi, ho studiata la seconda generazione di tre degli incroci: il ♀ *Oro* ♂ *Schensi* tra la razza cinese oro a 4 mute e la razza a 3 mute dello *Schensi*, il ♀ *Schensi* ♂ *Oro*, incrocio reciproco, e il ♀ *Schensi* ♂ *Nippon*. tra la razza a tre mute e la razza giapponese a 4 mute, bivoltina, *Nipponnishiki*.

L'ideale sarebbe stato poter allevare tante ovature tutte separatamente, per verificare se il rapporto di scissione in terzini e quartini fosse uguale per tutte le ovature, come dovrebbe essere secondo le leggi Mendeliane. Ma, data la deficienza di mezzi disponibili - spazio e aiuto nelle cure dell'allevamento -, mi sono dovuto limitare ad allevare isolate 50 ovature, mescolandone invece altre 106 in gruppi da 7 a 20, in lotti quindi abbastanza grandi per poter prelevare senza danno ad ogni muta un numero sufficiente di bachi per le pesate.

Era interessante, difatti, a parte la determinazione del comportamento ereditario del carattere 'numero delle mute', seguire, lungo tutto lo sviluppo larvale, l'accrescimento in peso del baco per tracciare le curve di sviluppo dei tre incroci e compararle tra loro e con quelle delle razze pure e degli incroci di prima generazione.

Quello che si sa per pratica è che, quando s'incrociano due razze più o meno diverse, l'incrocio, alla fine dello sviluppo, presenta caratteri intermedi (grossezza, vigore) che rappresentano quasi una media aritmetica tra i caratteri paterni e materni. Ma non si sa com'è che il carattere paterno vada, nel corso dello sviluppo, esplicando la sua influenza, perchè alla nascita il bacolino si presenta, per peso, grossezza, ed altri caratteri, tutto uguale alla madre (prevalenza dei caratteri materni nei primi stadi ontogenetici dell'individuo!).

È presumibile che nel corso dello sviluppo di questi ibridi avvenga un graduale passaggio dal tipo metabolico materno al tipo metabolico intermedio. Anzi è stata questa considerazione la prima che mi ha spinto a intraprendere lo studio dell'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta secondo la curva di sviluppo di razze pure e loro incroci reciproci. Finora si è troppo studiata l'eredità dei caratteri, la loro trasmissione da una generazione all'altra, senza badare, non dico al loro determinismo che solo in pochi casi è possibile accertare, ma nemmeno al loro sviluppo nell'ontogenesi. Donde concezioni dell'eredità prevalentemente statiche, mentre l'eredità, come tutti i fenomeni della vita, è essenzialmente dinamica.

I suddetti gruppi di ovature non sono stati costituiti a caso. Essendosi precedentemente osservato nello studio del comportamento ereditario del bivoltinismo che gli individui che conservano questo carattere sono i più precoci nello sviluppo larvale e i primi a sfarfallare, ho pensato di verificare se anche per il carattere 'numero delle mute' fosse possibile mettere in evidenza una relazione di questa sorta. E a questo scopo ho costituito i gruppi con ovature state deposte contemporaneamente, cioè da femmine

sfarfallate lo stesso giorno (del giugno 1923) dopo uno sviluppo contemporaneo nel periodo larvale e crisalidale. Mi sembrava plausibile la supposizione che le ovature deposte da femmine più precoci (sfarfallate nella prima giornata) dovessero dare percentuali di treotti (e di bivoltini, per uno degli incroci) superiori alle percentuali fornite dalla discendenza di femmine più tardive, a velocità di sviluppo minore.

Orbene i dati ottenuti hanno confermato, in linea generale, questa aspettazione teorica, la quale non so proprio come potrebbe conciliarsi con un'interpretazione Mendeliana dei fenomeni.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente annunzia che assistono alla seduta i proff. TROWBRIDGE dell'Università di Princeton e AGIAANI dell'Università di Tokyo, ai quali rivolge parole di saluto. Con vivo rimpianto parla della grave perdita del Socio Nazionale GIOVANNI BATTISTA GRASSI, illustrazione della scienza italiana e vanto dell'Accademia; accenna alle maggiori scoperte di lui ed alla sua opera istancabile per risanare dalla malaria alcune zone dell'agro romano; ricorda che il Grassi fu per molti anni Segretario della Classe; comunica poi le condoglianze della Società Reale di Napoli e dell'Istituto spagnolo di Oceanografia; si associa a nome dell'Accademia delle Scienze di Torino il Socio MORPURGO. Il Presidente stesso aggiunge la triste notizia della morte del Socio Nazionale CARLO EMERY, di cui pone in rilievo la sapiente attività di studi sugli insetti e sui pesci; e a lui si uniscono i Soci DE MARCHI e PINCHERLE; annunzia infine la perdita dei Soci Stranieri EUGENIO WARMING, cultore di ecologia e geografia botanica, e ALBINO HALLER, valoroso chimico, perito in seguito ad accidente di laboratorio, nonchè quella di GIUSEPPE VALLOT, fondatore dell'Osservatorio del Monte Bianco.

COMUNICAZIONI DIVERSE

Il Presidente dà quindi comunicazione di un appello alla pacificazione degli animi, rivolto dall'Università di Napoli agli Istituti superiori italiani, e dell'invito giunto dall'Accademia delle scienze di Russia alle prossime feste bicentinarie dell'Accademia stessa.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MAGGI offre un esemplare del suo trattato: «Elementi di statica e teoria dei vettori applicati».

Il Socio ZAMBONINI presenta il 1° volume della terza serie degli «Annali del R. Osservatorio Vesuviano», e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Socio LEVI-CIVITA fa omaggio all'Accademia, per incarico dell'autore, di due pubblicazioni del Corrisp. GUIDI, segnalandone la importanza.

Il Segretario CASTELNUOVO presenta l'opera del Socio LORIA G., intitolata: «Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti», e altre pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci DOBBEL, MENOZZI, SABBATANI e WILSON.

G. C.
